

---

---

**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СТРУКТУР**

---

---

## АЛГОРИТМ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ТВЁРДОМ ЦИЛИНДРЕ С ПОКРЫТИЕМ, НЕОДНОРОДНЫМ В УГЛОВОМ НАПРАВЛЕНИИ

Д. Р. Бирюков, С. А. Скобельцын

*Тулский государственный университет*

**Аннотация.** Рассматривается падение плоской монохроматической звуковой волны на абсолютно твёрдый цилиндр с покрытием в виде упругого цилиндрического слоя, плотность и упругие константы которого изменяются в угловом направлении. Построена математическая модель рассматриваемого дифракционного процесса, основанная на линейаризованной модели гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости и модели линейной теории упругости. Задача поиска рассеянной волны сводится к краевой задаче для бесконечной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

**Ключевые слова:** математическая акустика, звуковая волна, дифракция акустических волн, цилиндр с покрытием, неоднородный цилиндр, неоднородное покрытие, неоднородный упругий цилиндрический слой, неоднородность в угловом направлении, бесконечная система уравнений, линейная теория упругости.

### Введение

Среди всех актуальных направлений в исследовании дифракции акустических волн особое место занимает изучение влияния характеров неоднородности упругих тел на их звукоотражающие свойства. Уменьшения или увеличения, в некотором смысле, рассеяния звука можно достичь путём использования непрерывно-неоднородных покрытий. Как правило, в большинстве более ранних работ в качестве рассеивателей рассматривались тела цилиндрической и сферической форм с радиально-неоднородными покрытиями. Алгоритм решения подобных задач приведён, например, в работе [12]. Примеры решения задач дифракции на телах простой формы с радиально-неоднородными покрытиями — в работах [2, 5, 8–11].

Случаи более общего вида неоднородности рассматривались куда реже. Как правило, аналитическое решение тогда заметно усложняется. Зачастую для решения задач с покрытиями, имеющими сложный тип неоднородности, приходится использовать численные методы. К примеру, в [4, 7] для решения задач дифракции используется метод конечных элементов. Несмотря на удобство применения численных методов, поиск аналитических решений задач рассеяния акустических волн для более широкого класса неоднородностей остаётся важной задачей.

В данной работе приводятся постановка и алгоритм аналитического решения задачи рассеяния плоской акустической волны на абсолютно твёрдом цилиндре, покрытом упругим слоем, параметры которого зависят от координаты, соответствующей угловому направлению.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается бесконечный круговой абсолютно твёрдый цилиндр радиуса  $r_0$ , с которым связана прямоугольная декартова система координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Ось  $Oz$  является осью цилиндра. Также используется цилиндрическая система координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , связанная с декартовой посредством соотношений  $x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ .

Цилиндр имеет упругое неоднородное покрытие с внешним радиусом  $r_1$ , плотностью  $\rho(r, \varphi)$  и постоянными Ламе  $\lambda(r, \varphi)$ ,  $\mu(r, \varphi)$ . Параметры материала покрытия непрерывно зависят от пространственных координат.

Цилиндр с покрытием окружён идеальной жидкостью с плотностью  $\rho_f$  и скоростью звука  $c$ , в которой распространяется плоская гармоническая звуковая волна давления с амплитудой  $A$ , круговой частотой  $\omega$  и волновым числом  $k = \omega/c$ :

$$p_0 = A \exp(kx - \omega t). \quad (1)$$

Требуется отыскать рассеянное волновое поле  $p_s = p - p_0$ .

## 2. Математическая модель

Математическая модель поставленной задачи дифракции включает уравнения, описывающие волновые процессы в жидкости и покрытии, а также граничные условия между данными областями.

Уравнением, описывающим движение идеальной жидкости в случае распространения в ней гармонических колебаний, является однородное уравнение Гельмгольца [1, 13]:

$$\Delta p + k^2 p = 0.$$

Так как уравнению удовлетворяют и первичное  $p_0$ , и результирующее  $p$  волновые поля, то, ввиду однородности, ему удовлетворяет и рассеянное поле:

$$\Delta p_s + k^2 p_s = 0. \quad (2)$$

С учётом условий излучения на бесконечности [13], решение (2) ищется в виде бесконечного ряда

$$p_s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m H_m(kr) \exp(im\varphi). \quad (3)$$

Здесь  $H_m$  — функция Ханкеля первого рода порядка  $m$  [14];  $a_m$  — числовые коэффициенты рассеянной волны, подлежащие определению.

Движение частиц неоднородного покрытия цилиндра описывается общими уравнениями движения сплошной среды [3, 6], которые в случае гармонических колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho \omega^2 u_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{rr}}{r} + \rho \omega^2 u_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя закон Гука [3] и определение тензора деформаций Грина, можем выразить компоненты тензора напряжений через смещения частиц неоднородного покрытия:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\lambda + 2\mu}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

На внутренней границе покрытия (с жёстким цилиндром) должно выполняться краевое условие отсутствия смещений:

$$u_r \Big|_{r=r_0} = u_\varphi \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (6)$$

На внешней границе покрытия (с жидким пространством) должны выполняться краевые условия свободного проскальзывания:

$$\omega^2 u_r \Big|_{r=r_1} = \frac{1}{\rho_f} \left( \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1} \quad (7)$$

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=r_1} = (p_0 + p_s) \Big|_{r=r_1} \quad (8)$$

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (9)$$

### 3. Решение задачи

Параметры материала покрытия, являющиеся периодическими функциями координаты  $\varphi$ , представимы в форме экспоненциальных рядов Фурье:

$$\rho = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho_m \exp(im\varphi) \quad \lambda = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda_m \exp(im\varphi) \quad \mu = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mu_m \exp(im\varphi). \quad (10)$$

Коэффициенты  $\rho_m$ ,  $\lambda_m$  и  $\mu_m$  могут быть вычислены по формуле:

$$\chi_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi.$$

Функция  $\chi$  — любая из функций  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ . Аналогично, в виде экспоненциальных рядов Фурье можно представить компоненты смещений и напряжений покрытия:

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m^{(r)}(r) \exp(im\varphi) \quad u_\varphi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m^{(\varphi)}(r) \exp(im\varphi) \quad (11)$$

$$\sigma_{rr}(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_m^{(rr)}(r) \exp(im\varphi) \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_m^{(\varphi\varphi)}(r) \exp(im\varphi) \quad (12)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s_m^{(r\varphi)}(r) \exp(im\varphi).$$

Здесь  $v_m^{(r)}$ ,  $v_m^{(\varphi)}$ ,  $s_m^{(rr)}$ ,  $s_m^{(\varphi\varphi)}$ ,  $s_m^{(r\varphi)}$  — неизвестные коэффициенты. Подставляя (11)–(12) в (5), получим для каждого целого  $m$ :

$$s_m^{(rr)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ (\lambda_q + 2\mu_q) \frac{dv_n^{(r)}}{dr} + \frac{\lambda_q}{r} (v_n^{(r)} + inv_n^{(\varphi)}) \right] \quad (13)$$

$$s_m^{(\varphi\varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \lambda_q \frac{dv_n^{(r)}}{dr} + \frac{\lambda_q + 2\mu_q}{r} (v_n^{(r)} + inv_n^{(\varphi)}) \right] \quad (14)$$

$$s_m^{(r\varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \mu_q \frac{dv_n^{(\varphi)}}{dr} + \frac{\mu_q}{r} (inv_n^{(r)} - v_n^{(\varphi)}) \right]. \quad (15)$$

Индекс  $q$  здесь и далее используется для сокращённой записи разности  $q(m, n) = m - n$ . Подставляя (11)–(12) в (4), получим для каждого целого  $m$ :

$$\frac{ds_m^{(rr)}}{dr} + \frac{ims_m^{(r\varphi)} + s_m^{(rr)} - s_m^{(\varphi\varphi)}}{r} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_q \omega^2 v_n^{(r)} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{ds_m^{(r\varphi)}}{dr} + \frac{2s_m^{(r\varphi)} + ims_m^{(\varphi\varphi)}}{r} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_q \omega^2 v_n^{(\varphi)} = 0. \quad (17)$$

Подставляя (14) в (16)–(17), исключим из последних уравнений  $s_m^{(\varphi\varphi)}$ :

$$\frac{ds_m^{(rr)}}{dr} + \frac{ims_m^{(r\varphi)} + s_m^{(rr)}}{r} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \rho_q \omega^2 v_n^{(r)} - \frac{(\lambda_q + 2\mu_q)(v_n^{(r)} + inv_n^{(\varphi)})}{r^2} - \frac{\lambda_q}{r} \frac{dv_n^{(r)}}{dr} \right] = 0 \quad (18)$$

$$\frac{ds_m^{(r\varphi)}}{dr} + \frac{2s_m^{(r\varphi)}}{r} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \rho_q \omega^2 v_n^{(\varphi)} + \frac{m(\lambda_q + 2\mu_q)(iv_n^{(r)} - nv_n^{(\varphi)})}{r^2} + \frac{im\lambda_q}{r} \frac{dv_n^{(\varphi)}}{dr} \right] = 0. \quad (19)$$

Перед рассмотрением граничных условий отметим, что падающая волна (1) может быть разложена в ряд по цилиндрическим функциям [Шендеров]:

$$p_0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Ai^m J_m(kr) \exp(im\varphi). \quad (20)$$

Здесь  $J_m$  — функция Бесселя порядка  $m$  [Справочник]. Подставим (11)–(12), (20) в граничное условие (7) и выразим из полученной формулы  $a_m$ :

$$a_m = \frac{\rho_f \omega^2 v_m^{(r)}(r_1) - Ai^m k J'_m(kr_1)}{kH'_m(kr_1)}. \quad (21)$$

Далее, подставим (11)–(12), (20)–(21) в граничное условие (8):

$$s_m^{(rr)}(r_1) + Ai^m J_m(kr_1) + \left( \rho_f \omega^2 v_m^{(r)}(r_1) - Aki^m J'_m(kr_1) \right) \frac{H_m(kr_1)}{kH'_m(kr_1)} = 0. \quad (22)$$

Граничные условия (9) и (6) принимают вид:

$$s_m^{(rr)}(r_1) = 0 \quad v_m^{(r)}(r_0) = 0 \quad v_m^{(\varphi)}(r_0) = 0. \quad (23)$$

Решение краевой задачи (13), (15), (18)–(19), (22)–(23) позволяет определить значения  $v_m^{(r)}(r_1)$  для каждого целого  $m$  и, как следствие, значения  $a_m$  по формуле (21). Таким образом, рассеянная волна (3) определена.

## Заключение

Описанный в работе алгоритм определения рассеянной волны позволяет исследовать зависимость звукоотражающих свойств цилиндрических объектов от характера неоднородности их материала — в случае, когда значения параметров изменяются не в радиальном направлении, а в угловом.

## Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI, Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2001. – 736 с.
2. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Моделирование дискретно-слоистого покрытия упругого цилиндра радиально-неоднородным слоем в задаче рассеяния звука // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2014. – № 2. – С. 194–202.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. Пешков Н. Ю., Скобельцын С. А. Рассеяние звука упругим цилиндром с кусочно-непрерывным неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2020. – Вып. 10. – С. 214–226.
5. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75, № 5. – С. 850–857.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1983. – 528 с.
7. Скобельцын С. А. Решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны неоднородным упругим цилиндром с помощью МКЭ // Матер. междунар. научн. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. – С. 298–300.

8. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 3. – С. 202–208.

9. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 2, Ч. 2. – С. 265–274.

10. Толоконников Л. А., Белкин А. Э. Определение законов неоднородности покрытия цилиндра, находящегося в плоском волноводе, для обеспечения минимального отражения звука / Л. А. Толоконников, А. Э. Белкин // Чебышевский сборник. – 2020. – Т. 21, № 4(76). – С. 348–362.

11. Толоконников Л. А., Бирюков Д. Р. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с оптимальными звукоотражающими свойствами, находящегося вблизи плоской поверхности // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2020. – № 9. – С. 139–148.

12. Толоконников Л. А., Скобельцын С. А., Ларин Н. В. О методе решения задач дифракции звуковых волн на упругих телах с неоднородными покрытиями // Матер. междунар. научн. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула : Изд-во ТулГУ, 2009. – С. 477–480.

13. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики / Е. Л. Шендеров. – Л. : Судостроение, 1972. – 348 с.

14. Справочник по специальным функциям / под ред. Абрамовица М., Стигана И. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

## ВОЛНОВЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ. КАЧЕСТВЕННАЯ СУЩЕСТВЕННОСТЬ

А. Н. Богданов

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана  
Институт прикладной механики РАН*

**Аннотация.** Анализируется поведение слабого возмущения трансзвукового неклассического пограничного слоя при отклонении направления распространения возмущения от направления основного течения. Исследование проводится на регуляризованной модели нестационарного свободного вязко-невязкого взаимодействия.

**Ключевые слова:** газовая динамика, математическое моделирование, трансзвуковые течения, аналитические методы, вязко-невязкое взаимодействие, пограничный слой.

Переход от анализа задач газовой динамики в одномерной постановке к двумерной позволяет выяснить важные особенности развития слабых возмущений в газовом потоке, однако совпадение направлений распространения возмущения с направлением течения основного потока все же является исключительным. Насколько существенен учет различия указанных направлений для характера развития возмущений, определяющего важнейшее качественное свойство потока, его устойчивость?

Устойчивость пограничного слоя при трансзвуковом обтекании полуплоскости ниже исследуется с использованием регуляризованной трехпалубной модели нестационарного свободного вязко-невязкого взаимодействия [1] при следующих условиях: невозмущенное течение считается установившимся одномерным вдоль оси  $\delta$  в направлении вдоль обтекаемой полуплоскости ортогонально к её границе; профиль скорости невозмущенного течения в пограничном слое выбирается линейным по высоте слоя и постоянным по его ширине и в направлении течения; невозмущенное давление полагается постоянным

$$u_0 = y, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad p_0 = \text{const.}$$

В базовой системе уравнений Навье — Стокса [2] производится преобразование независимых переменных

$$L\bar{x} = x, \quad L\bar{y} = \varepsilon^{-1/3}y, \quad L\bar{z} = z, \quad L\bar{t} = \varepsilon^{2/3}Ut, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1)$$

и переход к безразмерным искомым параметрам

$$u = U\varepsilon^{2/3}\bar{u} + \dots, \quad v = \varepsilon U\bar{v} + \dots, \quad w = U\varepsilon^{2/3}\bar{w} + \dots, \quad (2)$$

Выбор однородного масштаба обезразмеривания в плоскости  $x, z$  подразумевает равнозначность обоих этих направлений. После выполнения преобразований (1), (2) и оставления лишь старших по  $\varepsilon$  членов в уравнениях Навье — Стокса в предположении несжимаемости течения из исходной системы следуют уравнения нестационарного несжимаемого пограничного слоя, описывающие течение вблизи обтекаемой полуплоскости (ниже и для независимых, и для зависимых переменных используются общепринятые обозначения)

$$\begin{aligned} u_x + v_y + w_z = 0, \quad u_t + uu_x + vv_y + ww_z = -p_x + u_{yy}, \quad p_y = 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -p_z + w_{yy}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вдали от обтекаемой полуплоскости невязкое нестационарное трансзвуковое течение приближенно можно считать безвихревым и для его описания в соответствии с регуляризованной

трехпалубной моделью [ 3 ] использовать линейное регуляризованное уравнение Линя — Рейсснера — Цяня (ЛРЦ) для потенциала скорости  $\phi(t, x, y)$

$$\varepsilon\phi_{tt} + 2\phi_{xt} + K_{\infty}\phi_{xx} - \phi_{y_1y_1} - \phi_{zz} = 0, \quad K_{\infty} = (M_{\infty}^2 - 1) / \varepsilon = \text{const}, \quad (4)$$

где  $M_{\infty}$  — число Маха невозмущенного течения, сущность регуляризации будет пояснена ниже. Заметим здесь, что выбранные ортогонально обтекаемой поверхности оси  $y, y_1$  имеют разное масштабирование в разных по удалению от обтекаемой поверхности областях течения («палубах»).

Внешнее невязкое течение и пограничный слой в трехпалубной модели разделяет некоторое переходное течение. Вывод уравнений, моделирующих эту область свободного вязко-невязкого взаимодействия, из уравнений Навье — Стокса и их интегрирование в связи с соответствующими граничными условиями проведены ранее [4] (заметим здесь, что растяжение осей координат в работе [4] было отличным от принятого здесь, оно было одинаковым по  $y, z$  и меньшим в 3 раза по  $x$ ). Приведем здесь только следующие из общего анализа соответствующие условия срачивания:

$$\begin{aligned} \phi_x(t, x, 0, z) = -p(t, x, z), \quad \phi_{y_1}(t, x, 0, z) = -A_x(t, x, z) \text{ при } y_1 \rightarrow 0 \\ u \rightarrow u_0 + A(t, x, z) \text{ при } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

где  $A(t, x, z)$  — функция мгновенного смещения линий тока переходного течения.

На поверхности обтекаемой полуплоскости выполняются условия прилипания и непротекания

$$u(t, x, 0, z) = 0, \quad v(t, x, 0, z) = 0, \quad w(t, x, 0, z) = 0.$$

Рассмотрим поведение слабых нестационарных возмущений такого рода течения. Примем, что приходящие возмущения отсутствуют

$$x \rightarrow -\infty: u \rightarrow y, \quad v \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \text{const}$$

и потребуем ограниченность возмущений на выходе из исследуемой области

$$\phi_{y_1} \rightarrow 0, \quad y_1 \rightarrow \infty.$$

Пусть в начальный момент времени возмущения также отсутствуют

$$t = 0: u = y, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = \text{const}.$$

Решение задачи сводится к поиску решений линеаризованной системы уравнений (3)

$$u_{1x} + v_{1y} + w_{1z} = 0, \quad p_{1y} = 0, \quad u_{1t} + u_0 u_{1x} + \frac{du_0}{dy} v_1 = -p_{1x} + u_{1yy}, \quad w_{1t} + u_0 w_{1z} = -p_{1z} + w_{1yy}$$

будем искать решения в гармоническом по всем, кроме  $y$ , независимым переменным виде

$$\sim \exp(\omega t + i(kx + lz)),$$

где  $\omega$  — комплексное число,  $k, l$  — положительные действительные числа, зависимость от координаты  $y$  положим общего вида. Обнаружение положительных действительных  $\omega$  ( $\text{Real } \omega > 0$ ) будет означать рост слабых возмущений течения.

Дисперсионное соотношение (ДС)  $\omega = \omega(k)$  в этой задаче имеет вид

$$\frac{1}{\int_{\Omega} Ai(\zeta) d\zeta} \frac{dAi}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\Omega} = \frac{i^{1/3} k^{7/3}}{\sqrt{\varepsilon\omega^2 + ik\omega - k^2 K_{\infty} + l^2}}, \quad (5)$$

где  $\Omega = \omega / (ik)^{2/3}$ ,  $K_{\infty} = (1 - M_{\infty}^2) / \varepsilon^{2/3}$ ,  $Ai$  — функция Эйри. Классическая модель [4, 5] даёт ДС в виде

$$\frac{1}{\int_{\Omega} Ai(\zeta) d\zeta} \frac{dAi}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\Omega} = \frac{i^{1/3} k^{7/3}}{\sqrt{ik\omega - k^2 K_{\infty} + l^2}} \quad (6)$$

как видно ДС (5,6), полученные по регуляризованной и классической трехпалубным моделям, различаются наличием/отсутствием в них члена с  $\varepsilon$ .

Суть регуляризации [3] классической модели нестационарного свободного вязко-невязкого взаимодействия [1] для трансзвукового диапазона заключается в сохранении в уравнении ЛРЦ (4) при его выводе из полных уравнений для потенциала сингулярного члена трансзвукового разложения со второй производной по времени. Полученное таким образом уравнение возникает, как видно, естественным образом, его удобно называть регуляризованным уравнением ЛРЦ, оно невырожденное гиперболическое и описывает распространение возмущений в поле течения во всех направлениях.

Для прямых волн имеем ДС вида

$$\frac{1}{\int_{\Omega}^{\infty} Ai(\zeta) d\zeta} \frac{dAi}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\Omega} = \frac{i^{1/3} k^{7/3}}{\sqrt{\varepsilon\omega^2 + ik\omega - k^2 K_{\infty}}}. \quad (7)$$

Сравнение зависимостей (5) и (7) показывает полное совпадение их вида при введении в (5) эффективного трансзвукового параметра  $K_{\infty}^* = K_{\infty} - \left(\frac{l}{k}\right)^2$ , он будет соответствовать  $K_{\infty}$  при  $l$ . Таким образом имеет место прямая аналогия поведения волн различных направлений. Величина угла распространения косого возмущения (определяемая  $l$ ) изменяет величину трансзвукового параметра, соответствующего прямым волнам.

### Заключение

Проведенный анализ обнаруживает определенное соответствие условий распространения плоских и косых (под углом к направлению основного течения) возмущений при соответствующих значениях скорости основного течения. Использование регуляризованной модели не дало качественного нарушения аналогии результатов для плоского и пространственного (в смысле учета разницы направлений распространения возмущения и течения основного потока) режимов.

### Литература

1. Рыжов О. С., Савенков И. В. Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока // ПМТФ. – 1990. – № 2. – С. 65–71.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 2.
3. Богданов А. Н., Диесперов В. Н. Моделирование нестационарного трансзвукового течения и устойчивость пограничного слоя при свободном взаимодействии на трансзвуковых скоростях // ПММ. – 2005. – Т. 69, вып. 3. – С. 394–403.
4. Савенков И. В. О пространственных эффектах при генерации трехмерных волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое при трансзвуковых скоростях внешнего потока // ЖВМиМФ. – 2005. – Т. 45, № 10. – С. 1886–1892.
5. Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // J. of Mathematics and Physics. – 1948. – V. 27, No 3. – P. 220–231. (Имеется перевод: Х. Ш. Тзян, Ц. Ц. Лин, Е. Рейснер. О двумерном неустановившемся движении тонкого тела в сжимаемой жидкости / Газовая динамика (Сб. статей). Под ред. С. Г. Попова и С. В. Фальковича. – М. : Изд-во иностр. лит., 1950. – С. 183–196).

## АНАЛИЗ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ РАЗЛЁТА ЭЛЕМЕНТОВ И ПРЯМОТОЧНОЙ УСТАНОВКИ

Д. О. Богданюк, А. В. Панченко

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова*

**Аннотация.** Рассматривается класс определённых задач, основным объектом которых является система из одного или нескольких разновидностей летящих объектов, связанных некоторым специальным образом. Некоторые элементы в процессе, тем или иным способом соединяются или разъединяются и удаляются друг от друга. Тема работы основана на большом количестве подобных практических задач. Представляется несколько основных целей — аэродинамика связанных объектов и взаимное аэродинамическое воздействие, благоприятный прогнозируемый разлёт элементов, прогнозируемая нутация объекта для требуемого разлёта элементов, выявление характеристик систем, уменьшения негативных явлений.

**Ключевые слова:** аэробаллистика, разделяющиеся элементы, разлёт элементов, донное извлечение, разлёт крышек, ракетно-прямоточный двигатель, артиллерийский снаряд, конструктивная схема, двухфазные течения, численное моделирование, течение газа с частицами, газовзвеси, взаимодействие частиц и газа, зона расширения вакуумных струй, сопловое течение.

### Введение

В различных технических устройствах, в разнообразных процессах технологиях, в которых существенными являются факторы газодинамической нестационарности, понимание особенностей, которые приносит эта нестационарность, и разработка средств управления параметрами этих явлений представляют основу разработки новых и модернизации существующих устройств и технологий, в том числе и адаптивных технологий создания материалов с управляемыми свойствами. В силу этого тема научного исследования, в котором осуществляется разработка методов и средств решения новых задач нестационарной газодинамики, в которых в существенной мере проявляются многодисциплинарные процессы газодинамики, аэроакустики, двухфазности и тепломассопереноса.

Существует большой пласт систем, применяемых для поражения элементами, заградительного и маскирующего использования, противоследящего эффекта. Чаще всего такие элементы являются системами из множества небольших элементов, то есть носителями с некоторым количеством разделяющихся элементов на части. В свою очередь некоторая часть содержит переносимое и используемое специальное содержимое. Небольшие элементы упаковываются и извлекаются разными способами, что определяет особенность конструкции носителя. Донное, концентрическое извлечение, по потоку, против потока, вбок от потока.

Извлекаемые элементы имеют, в свою очередь, тоже различные конструкции и особенности. Существуют элементы цилиндрические с раскрываемым оперением и без, сферические и иной конструкции. В зависимости от массогабаритных характеристик и поставленной задачи определяется способ доставки до цели и количество элементов или извлечение по потоку [1–3].

Проектирование элементов включает в себя задачи, связанные с выданной конструктивной схемой или наличием определённых готовых элементов и подбор конструкции, соответственно под эти данные. Например, сохранение определённых размеров, входного диффузора и особенностей профиля сопла, в котором возникают изменения скорости потока. Или рассмотрение систем с наличием центрального тела. В том числе возникают газодинамические

явления в некоторых конструктивных полостях после сгорания топлива. А также наличие некоторых конструктивных элементов, вносящих возмущения в поток.

Объектом исследования является некоторая вытянутая система кассетного типа. Конструкция рассматриваемого изделия имеет встроенный прямоточный сопловой блок, с топливом в головной конусной части. Головная часть имеет различные варианты исполнения. Конусная головная часть может разделяться перегородкой: в одной части, близлежащей к сопловому блоку находится топливо, во внешней части может быть расположено специальное вещество. Концентрически расположенные шахты коаксиально сопловому блоку. Внутри каждой шахты содержатся некоторые элементы. В каждой шахте помещаются 3 таких элемента. Существуют разные компоновки систем элементов. Возможно исполнение системы с различным временем выхода из шахты каждого элемента, или выход всех элементов, находящихся в шахте, а так же различное время начала использования каждой шахты. Возможен попарный вылет элементов из противоположно расположенных шахт.

Круг задач рассматривается с газодинамической точки зрения и решается с использованием программных средств и современных технологий вычислений и перестроения сеток.

### 1. Прямоточный реактивный двигатель в артиллерийском снаряде

Идея создания прямоточного воздушно-реактивного двигателя (ПВРД) была выдвинута французским инженером Рене Лореном около 1907 года и подробно описана в статьях, опубликованных в журнале «Аэрофиль» за 1913 год [4]. Никаких попыток применить своё изобретение Лорен не принимал.

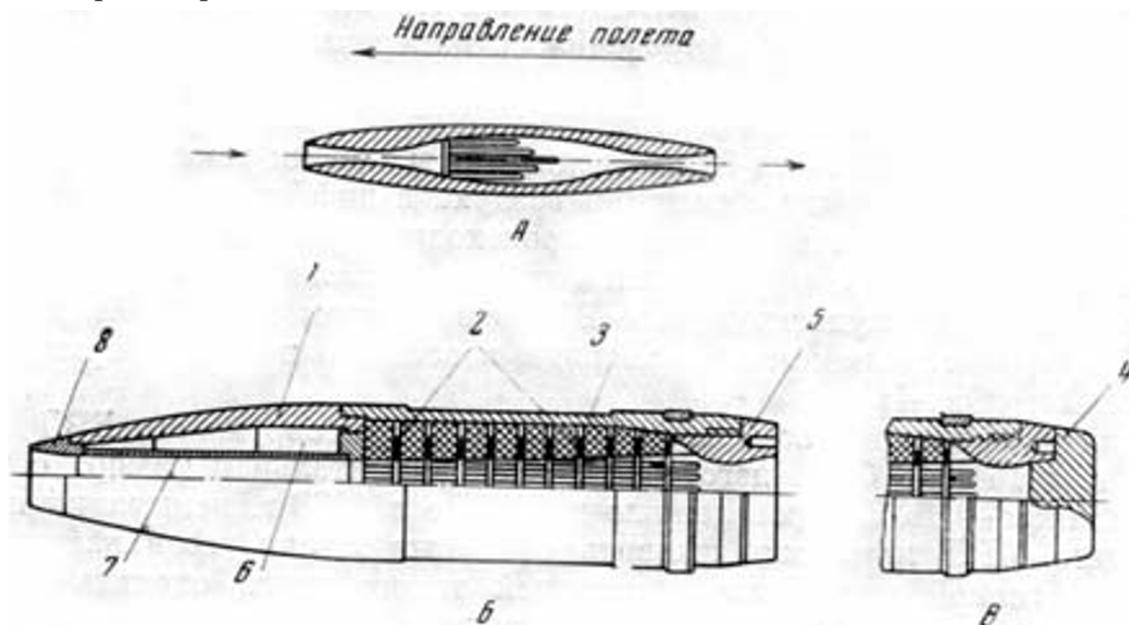


Рис. 1. Исследуемый снаряд в разрезе. Конструкция снаряда с ПВРД 76-мм [6]

А — схема; Б — конструкция; В — задняя часть снаряда с заглушкой; 1 — оживальная часть; 2 — топливная шашка; 3 — корпус снаряда; 4 — заглушка; 5 — сопло; 6 — свободная полость для размещения полезного груза; 7 — входной канал; 8 — входное отверстие для воздуха

Использование ПВРД в артиллерийских снарядах было впервые предложено в патенте венгерского ученого Альберто Фоно в 1915 году [4].

В России и СССР теоретическим и инженерным исследованиям этой схемы двигателя занимался Ф. А. Цандер. Первые упоминания о ВРД у него имеются в стенограммах, датированных 1922 годом [5]. В нашей стране идею применения ПВРД на твердом топливе в артиллерийском снаряде использовали Ю. А. Победоносцев и М. С. Кисенко, которые отработывали

ПВРД на базе 76-мм артиллерийского снаряда, топливом для ПВРД которого служил белый фосфор. Начиная с июля 1933 по 1935 год проводятся испытания снарядов, в ходе которых достигаются скорости полета до 2 М [6]. На рис. 1 представлен исследуемый снаряд в разрезе на его элементы. Целью экспериментов была отработка ПВРД на твердом топливе для последующего использования в ракетной технике.

Типичным рассматриваемым представителем является изделие 9М27К или 9Н128К, представленное в полном виде, включая срез на рисунке 2 [7]. В том числе существуют системы, в которых рассматривается длинная камера сгорания для лучшего горения топлива изделий с ПВРД и РПД. Представленные изделия в патентах [8, 9] лишь частично удовлетворяют требованиям. Схемы, созданные в БГТУ ВОЕНМЕХ имеют перспективную схему, представленную в трудах Кэрта Б. Э. [10–12].

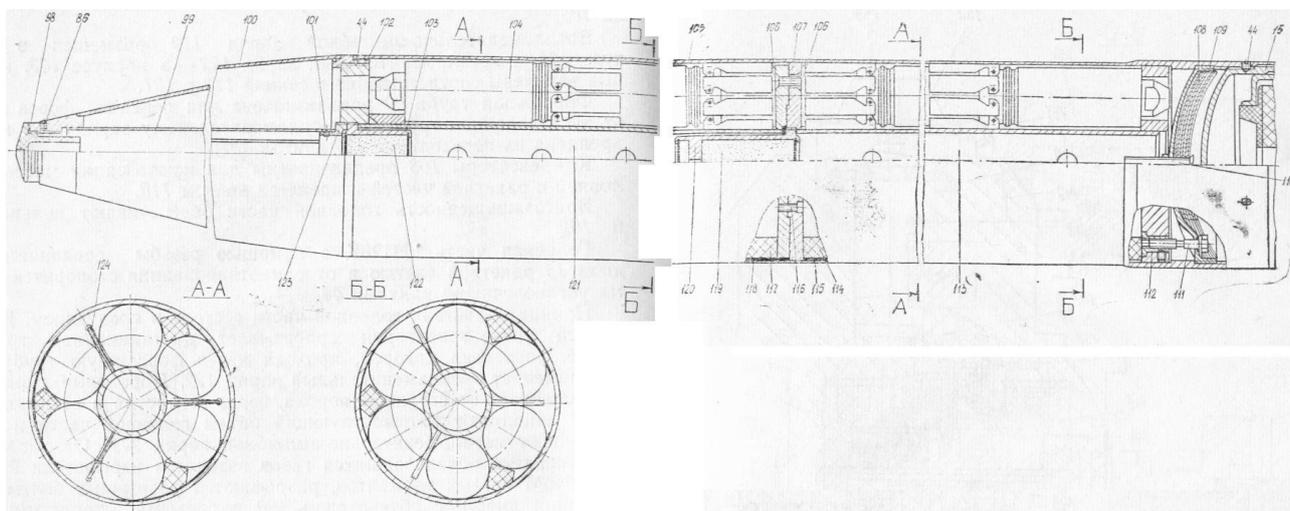


Рис. 2. Типичное изделие 9Н128К [7]

Чертёж мной рассматриваемого изделия со срезом представлен на рис. 2.

Произведены некоторые расчёты вылета элементов из типичного изделия. Некоторый момент аэродинамического обтекания объекта представлен на рис. 3.

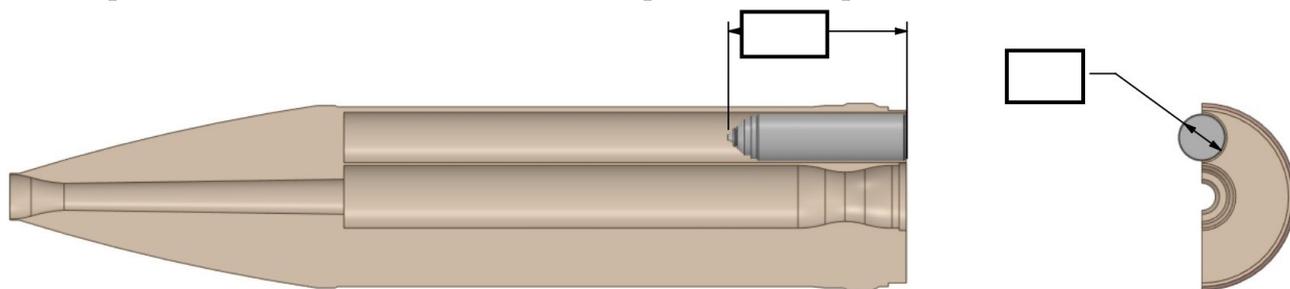


Рис. 3. Модель рассматриваемого условного изделия

Требуется обратить большое внимание на момент вылета элементов из, в данном случае, донной части изделия. Вылетающие элементы имеют различные воздействия. Кроме взаимодействия с основным изделием, могут, проявляться явления между вылетающими элементами, струей сопла, некоторыми вылетающими крышками. [13]

## 2. Гидроаэродинамическое обтекание некоторого изделия

В данном разделе представлены результаты некоторого аэродинамического обтекания изделия.

Выполнена разработка программы расчёта соплового и засоплового течения методом Годунова и маршевым методом. Пример расчёта представлен на рис. 4.

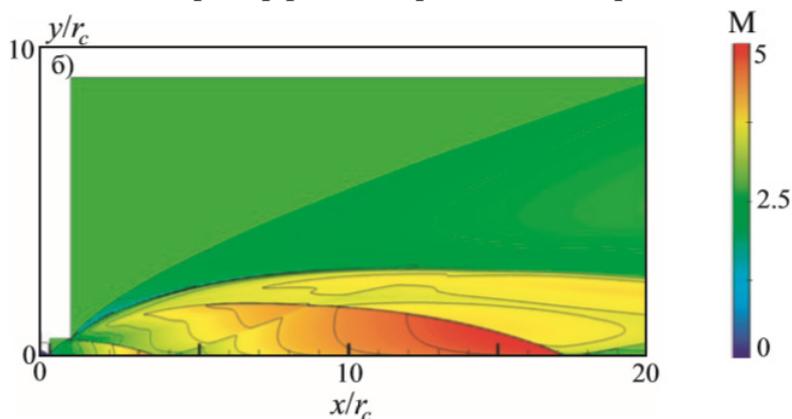


Рис. 4. Расчёт истекания струи из прямогочного воздушно-реактивного двигателя некоторого типичного изделия

На рис. 5 представлен момент некоторой работы двигательной установки.

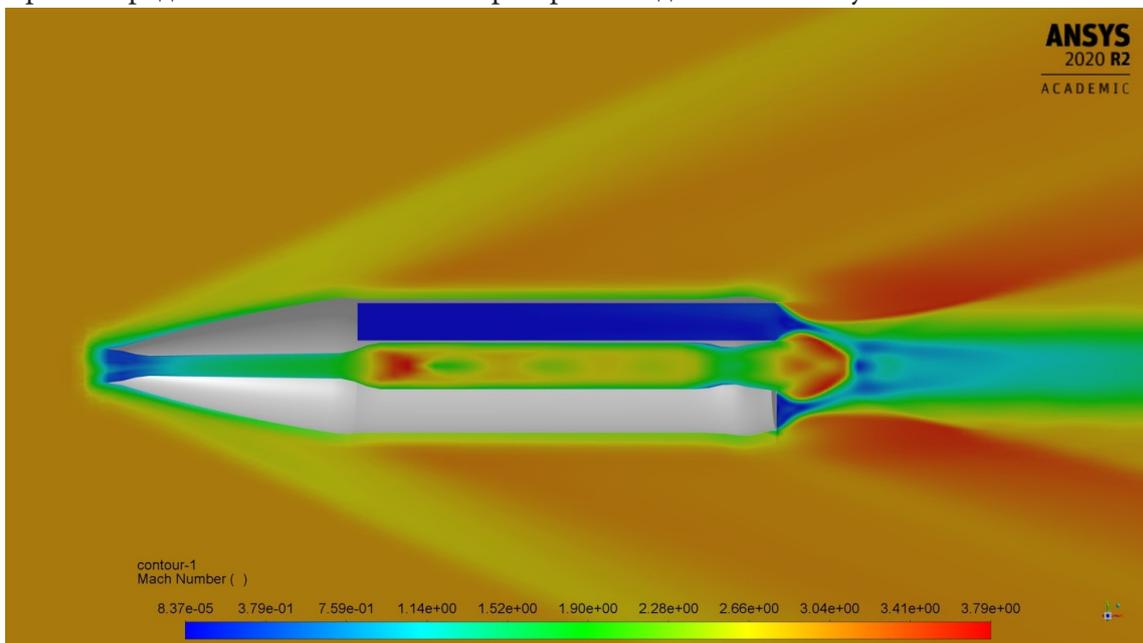


Рис. 5. Расчёт обтекания некоторого типичного изделия, непосредственно его сопловой части

На рис. 6 представлен расчёт в некоторый момент вылета элемента из изделия.

### Заключение

Выполнены расчёты ряда обтеканий объектов и отстыкуемых объектов. Выполнен анализ поведения работ.

### Благодарности

Огромная благодарность моему основному научному руководителю Емельянову Владиславу Николаевичу. Так же моему второму научному руководителю и основоположнику темы работы Кэрту Борису Эвальдовичу. Также благодарность ученикам научных руководителей,

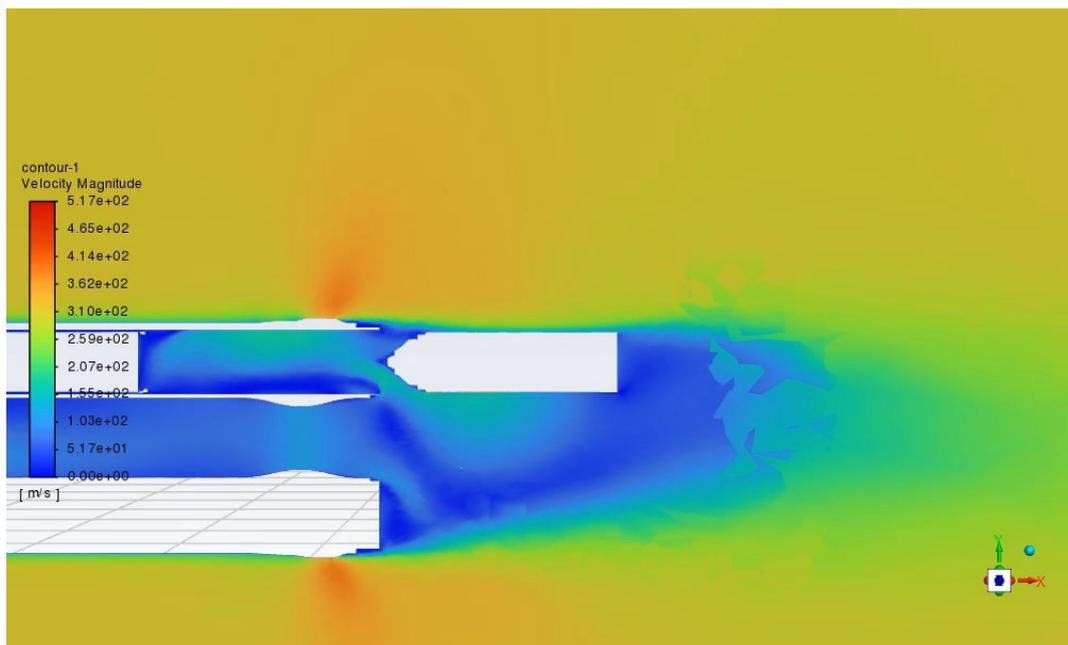


Рис. 6. Расчёт вылета некоторого типичного элемента из носителя

кто помогал в разной степени в выполнении работ: Яковчуку Михаилу Сергеевичу, Кучеренко Матвею, Панченко Антону Вадимовичу, Павлову Ярославу Олеговичу. И всем, кто вовлечён в данную деятельность.

### Литература

1. Кэрт Б. Э. Расчетная оценка баллистических возможностей артиллерийских снарядов с ракетно-прямоточными двигателями / Б. Э Кэрт, Е. А. Знаменский, В. О. Кравцов, А. В. Панченко, В. А. Чубасов. // БГТУ «ВОЕНМЕХ», МВАрта. Известия российской академии ракетных и артиллерийских наук. Научно-производственное объединение специальных материалов, Российская академия ракетных и артиллерийских наук. С. 125–133.
2. Кэрт Б. Э. Математическое моделирование и экспериментальная отработка систем разделения реактивных снарядов в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для вузов / Б. Э. Кэрт, В. И. Козлов, Н. А. Макаровец ; под редакцией Н. А. Макаровца. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. – 240 с.
3. Калистратов А. А. К вопросу о применении кассетных боеприпасов при прорыве обороны. 13 Октября 2023 06:30. Армейский сборник №10 2023 г Армейский сборник журнал министерства обороны российской федерации // Электронный ресурс [https : //army.ric.mil.ru/ Stati/item/518182/](https://army.ric.mil.ru/Stati/item/518182/)
4. Бондарюк М. М., Ильяшенко С. М. Прямоточные воздушно-реактивные двигатели. – М., 1958.
5. Цандер А. Ф. Проблемы полета при помощи реактивных аппаратов // Сборник статей, Второе дополненное издание под редакцией Л. К. Корнеева. – М., 1961.
6. Меркулов И. А. Первые экспериментальные исследования прямоточных воздушно-реактивных двигателей ГИРДа // Из истории авиации и космонавтики. Вып. 3. – М. : ИИЕТ АН СССР, 1965. – С. 21–32.
7. Реактивные снаряды систем залпового огня 9К57. Техническое описание и инструкция по эксплуатации. Ордена Трудового Красного Знамени военное издательство Министерства обороны СССР. Москва, 1981. – 56 с.

8. Пат. RU 2493533, МПК F42/00. Активно-реактивный снаряд / Л. И. Алёшичева, В. А. Дунаев, В. А. Никитин [и др.] Заявлено 29.05.2012; Патентообладатель ТулГУ.
9. Пат. RU 2486452, МПК F42B10/38. Способ увеличения дальности полета артиллерийского снаряда и устройство для его реализации / В. В. Ветров, Е. М. Костяной Заявлено 02.04.2012; Патентообладатель ТулГУ.
10. Пат. RU 2522699, МПК F42B15/00. Способ увеличения дальности полета артиллерийского снаряда / В. В. Ветров, Е. М. Костяной, А. И. Дикшев. Заявлено 10.12.2012; Патентообладатель ТулГУ.
11. Расчетная оценка баллистических возможностей артиллерийских снарядов с ракетно-прямоточными двигателями / Б. Э. Кэрт, В. А. Чубасов, Е. А. Знаменский, В. О. Кравцов, Я. О. Павлов, А. В. Панченко, Ю. В. Генкин // В кн.: Направления повышения энергобаллистической эффективности энергосиловых установок для летательных аппаратов: Научно-технический сборник трудов международного военно-технического форума «АРМИЯ-2019» / ВА РВСН им. Петра Великого. – Балашиха, 2019. – С. 134–149.
12. Оценка баллистических возможностей артиллерийских снарядов с ракетно-прямоточными двигателями / Б. Э. Кэрт, В. А. Чубасов, Е. А. Знаменский, В. О. Кравцов, Я. О. Павлов, А. В. Панченко, Ю. В. Генкин // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2019. – Т. 20, Вып. 2. – <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-2/articles/826/>
13. Расчетная оценка баллистических возможностей артиллерийских снарядов с ракетно-прямоточными двигателями / Б. Э. Кэрт, Е. А. Знаменский, В. О. Кравцов, А. В. Панченко, В. А. Чубасов // Известия РАН. – 2019. – Вып. 2 (107). – С. 125–133.

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ КОЭФФИЦИЕНТА ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ ТЕЛА КАПЛЕВИДНОЙ ФОРМЫ

С. О. Гладков, Н. С. Нагибин

*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)*

**Аннотация.** В данной работе изложена методика модельного расчёта коэффициента лобового сопротивления для тела каплевидной формы.

**Ключевые слова:** каплевидное тело, гидродинамическое сопротивление, аппроксимационный подход, динамическая вязкость, число Рейнольдса.

Настоящая работа посвящена моделированию коэффициента лобового сопротивления для обтекаемого тела формы капли. Согласно данным, приведённым в монографии [1], такая форма должна обеспечивать идеальное обтекание потоком.

В основу исследования положены результаты, представленные в работе [2]. Аналогично указанному источнику, мы ограничиваемся анализом центрального сечения симметричного тела с конечной толщиной. Контур сечения описывается посредством специальной функциональной зависимости  $\eta(x)$ .

Согласно стандартному определению [1] коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  введем как

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u^2 S}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность континуума,  $u$  — скорость течения,  $S$  — полная площадь поверхности,  $F_x$  — сила сопротивления.

Для расчёта силы сопротивления  $F_x$  используется соотношение:

$$F_x = 2\mu h u a \int_0^a H dx, \quad (2)$$

где  $\mu$  — динамическая вязкость,  $u$  — скорость гидродинамического потока.

Согласно [2], подынтегральная функция имеет вид:

$$H = \frac{1}{x^2} \left[ \left( 2G + \frac{\eta}{x} G' \right) \eta' + G' \left( 1 - \frac{\eta^2}{x^2} \right) - \frac{2\eta}{x} G - \frac{x^2}{a} \left( 1 + \frac{a}{x} G \right) \eta'' \right] \Bigg|_{\xi=\frac{\eta}{x}}, \quad (3)$$

при этом зависимость

$$G(\xi) = \frac{1}{C(\xi^2 + 1) - \frac{\text{Re}}{4} [\xi + (\xi^2 + 1) \text{arctg } \xi]}. \quad (4)$$

Аргумент этой функции задан в виде  $\xi = \frac{\eta(x)}{x}$ , а  $C$  — безразмерная константа.

Для упрощения расчётов применяется аппроксимационный метод, предложенный Л. Д. Ландау. В рамках этого подхода зависимость  $\eta(x)$  аппроксимируется модельной функцией

$$\eta(x) = x e^{-\frac{\alpha x}{a}}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  — некоторая безразмерная феноменологическая константа.

Данный метод особенно эффективен при работе со сложными функциональными зависимостями, для которых затруднительно получить строгое аналитическое решение. Использование аппроксимации (5) существенно упрощает вычисления. Подставляя (5) в (2), получаем:

$$S = 2 \int_0^a x e^{-\frac{x}{a}} dx = 2a^2 \left[ \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha} \right]. \quad (6)$$

После подстановки выражений (6) и (5) в (4) приходим к соотношениям вида

$$G(t) = \frac{t^2}{C(t^2 + f^2) - 0,25 \operatorname{Re} \left[ tf + (t^2 + f^2) \operatorname{arctg} \left( \frac{f}{t} \right) \right]},$$

$$G'(\xi) = \frac{t^4 \left[ (t^2 + f^2)(Rt - 4Cf) + t^2 \operatorname{Re} \operatorname{farctg} \left( \frac{f}{t} \right) \right]}{2a(t^2 + f^2) \left\{ C(t^2 + f^2) - 0,25 \operatorname{Re} \left[ tf + (t^2 + f^2) \operatorname{arctg} \left( \frac{f}{t} \right) \right] \right\}^2}, \quad (7)$$

где  $t = \frac{x}{a}$ , а  $f = f(t) = te^{-\alpha t}$ .

Далее, после ряда преобразований, получаем

$$\eta = ate^{-\alpha t},$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} = (1 - \alpha t) e^{-\alpha t}, \quad (8)$$

$$\eta'' = \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\alpha(\alpha t - 2) e^{-\alpha t}}{a}.$$

С учётом приведённых соотношений, выражение для коэффициента лобового сопротивления принимает вид

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u^2 S} = \frac{2h}{a \operatorname{Re}} \xi(\alpha) J, \quad (9)$$

где  $\operatorname{Re} = \frac{au}{\nu}$  — число Рейнольдса, а  $\xi(\alpha) = \frac{\alpha^2}{[1 - (\alpha + 1)e^{-\alpha}]}$ .

В общем виде

$$J = \int_0^1 H(t, \operatorname{Re}, C, \lambda) dt, \quad (10)$$

где подынтегральное выражение после довольно трудоемких вычислений может быть приведено к виду

$$H(t, \operatorname{Re}, C, \lambda) = \alpha(2 - \alpha) e^{-\alpha t} - \frac{\alpha^2 e^{-\alpha t}}{\psi} + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{2\psi^2}, \quad (11)$$

где безразмерные функции находятся как

$$\varphi_1 = \varphi_1(\alpha, \lambda) = \frac{1 + (1 - \alpha t - \lambda^2) e^{-2\alpha t}}{1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t}},$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(\alpha, \lambda, C, \operatorname{Re}) = \frac{\operatorname{Re}}{t} \left[ 1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t} - 4\lambda C e^{-\alpha t} (1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t}) \right] + \frac{\lambda \operatorname{Re} e^{-\alpha t}}{t^2} \operatorname{arctg}(\lambda e^{-\alpha t}), \quad (12)$$

$$\psi = \psi(\alpha, \lambda, C) = C \left[ 1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t} + \operatorname{arctg}(\lambda e^{-\alpha t}) \right] + \lambda e^{-\alpha t}.$$

Линейные размеры тела учитываются с помощью безразмерного параметра  $\lambda = \frac{b}{a}$ . В итоге получаем окончательную аналитическую формулу для коэффициента лобового сопротивления

$$C_x = \frac{h\lambda}{2l\text{Re}} \frac{\xi(\alpha)(2-\lambda^2)\text{arctg } \lambda}{[C(1+\lambda^2 + \text{arctg } \lambda) + \lambda]^2 (1+\lambda^2)}. \quad (13)$$

В предельных случаях имеем:

1. Если  $\lambda \ll 1$ , то есть продольный размер тела значительно превышает его поперечный размер, а именно  $a \gg b$ , коэффициент лобового сопротивления, как это и должно быть, стремится к нулю по параболическому закону

$$C_x \approx \frac{h\lambda^2}{l\text{Re}C^2} \xi(\alpha) \sim \lambda^2. \quad (14)$$



Рис. 1. Предельный случай № 1

2. Согласно зависимости (3.21), применимость данной формулы ограничена условием  $\lambda < \sqrt{2}$ . Когда масштаб неоднородности приближается к линейному размеру тела, из формулы (13) следует, что коэффициент лобового сопротивления для тела такого вида будет иметь вид

$$C_x \approx \lambda^2 \frac{h}{l\text{Re}C^2} \xi(\alpha) e^{-2\alpha \frac{l}{a}}. \quad (15)$$

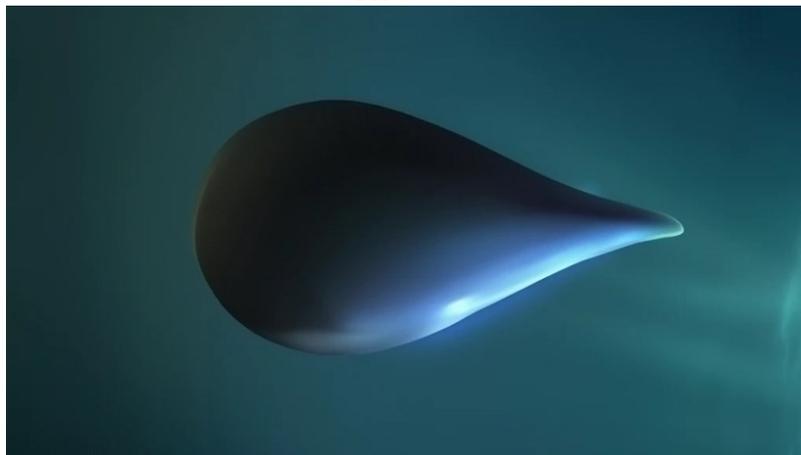


Рис. 2. Предельный случай № 2

### Заключение

1. Предложен аппроксимационный подход для вычисления коэффициента лобового сопротивления каплевидного тела, сечение которого имеет конечную ширину  $h$ .
2. Анализ полученной формулы указывает на качественно корректную трактовку результата.
3. Рассмотрены два предельных случая, возможных при обтекании тел.

## Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Т. 6. – М. : Наука, 1988. – 733 с.
2. Гладков С. О., Нагибин Н. С. К вопросу аналитического определения наилучшей формы обтекания тел в вязком континууме // Известия вузов. Физика. – 2024. – Т. 67, В. 3. – С. 39–52.

## ДИНАМИКА ПЛОСКИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СЛЕДОВ В ПАССИВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

А. Г. Деменков<sup>1,2</sup>, Г. Г. Черных<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет*

<sup>3</sup>*Федеральный исследовательский центр информационных  
и вычислительных технологий, Новосибирск*

**Аннотация.** С применением модифицированной двухпараметрической математической модели, основанной на алгебраических представлениях Родригеа Рейнольдсовых напряжений выполнено численное моделирование течения в плоском турбулентном следе за телом в пассивно стратифицированной жидкости. Обсуждается вопрос о локально равновесном усечении уравнений переноса вертикальной компоненты вектора потока массы и дисперсии турбулентных флуктуаций плотности. Осуществлено сопоставление законов автомодельного вырождения характеристик поля плотности в классическом турбулентном следе за буксируемым цилиндром и безимпульсном турбулентном следе. Выполнены численные эксперименты, демонстрирующие появление значительных погрешностей при локально равновесном усечении уравнения переноса дисперсии флуктуаций плотности.  
**Ключевые слова:** плоский турбулентный след в пассивно стратифицированной среде, полуэмпирические модели турбулентности, математическое моделирование.

### Введение

В связи с изучением турбулентного перемешивания в глубоководных стратифицированных водоемах, морях, океанах и атмосфере представляет интерес модельная задача о плоском турбулентном следе в пассивно стратифицированной среде. Невозмущенная жидкость стратифицирована, но эффекты воздействия силы тяжести пренебрежимо малы, и стратификация не оказывает влияния на гидродинамику течения. Задача о плоском турбулентном следе в пассивно стратифицированной среде интересна также в связи с разработкой и совершенствованием различных технических устройств.

Анализ результатов известных работ по экспериментальному и математическому моделированию плоских турбулентных следов в пассивно стратифицированной среде [1–6] указывает на недостаточную изученность автомодельности вырождения характеристик поля плотности и совместных одноточечных корреляций поля скорости и плотности в следах с варьруемыми значениями суммарного избыточного импульса. Недостаточно изученным является также вопрос о применимости локально равновесного усечения уравнения переноса дисперсии турбулентных флуктуаций плотности. Исследованию этих вопросов посвящена настоящая работа.

### 1. Постановка задачи

Для описания течения в дальнем плоском турбулентном следе в пассивно стратифицированной среде воспользуемся следующей математической моделью [4–9]:

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t \frac{\partial U_1}{\partial y} \right), \quad (1)$$

$$U_0 \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t \frac{\partial e}{\partial y} \right) + P - \varepsilon, \quad (2)$$

$$U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \quad (3)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle v' \rho' \rangle, \quad (4)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle v' \rho' \rangle}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{1\rho} \frac{\partial \langle v' \rho' \rangle}{\partial y} \right) - \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} - C_{1T} \frac{\varepsilon}{e} \langle v' \rho' \rangle, \quad (5)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{2\rho} \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial y} \right) - 2 \langle v' \rho' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} - C_T \frac{\langle \rho'^2 \rangle \varepsilon}{e}. \quad (6)$$

В уравнениях(1)–(6) величина  $U_1$  — дефект продольной осредненной компоненты скорости (в классическом следе за цилиндром [10]  $U_1 = U_0 - U$ ,  $U_0$  — скорость невозмущенного потока; в следе с нулевым избыточным импульсом [11]  $U_1 = U - U_0$ ;  $e$  — кинетическая энергия турбулентности;  $\varepsilon$  — скорость диссипации энергии турбулентности;  $\langle \rho_1 \rangle$  — осреднённый дефект плотности:  $\langle \rho_1 \rangle = \langle \rho \rangle - \rho_s(y)$ ,  $\rho_s(y) = \rho_0(1 - ay)$  — распределение плотности невозмущённой жидкости,  $\rho_0 = \rho_s(0)$ ;  $\langle \rangle$  — знак осреднения,  $\langle v' \rho' \rangle$  — вертикальная компонента вектора потока массы,  $\langle \rho'^2 \rangle$  — дисперсия турбулентных флуктуаций плотности.

Начало координат находится на задней кромке тела;  $x$  — горизонтальная,  $y$  — вертикальная оси координат; в уравнениях (1)–(6) в предположении малости отброшены слагаемые с молекулярной вязкостью и диффузией. Применится приближение дальнего следа; плотность жидкости считается линейной функцией температуры. Коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии задаются следующим образом [7–9]:  $v_t = \frac{2}{3} \Phi \left( 1 - \Phi \frac{P}{\varepsilon} \right) \frac{e^2}{\varepsilon}$ ,  $\Phi = \frac{1 - C_2}{C_1 - 1 + P/\varepsilon}$ ;  $K_{1\rho} = 2C_{s\rho} \frac{\langle v'^2 \rangle e}{\varepsilon}$ ,  $K_{2\rho} = C_\rho \frac{\langle v'^2 \rangle e}{\varepsilon}$ ;  $\langle v'^2 \rangle = \frac{2}{3} \left( 1 - \Phi \frac{P}{\varepsilon} \right) e$  — нормальное рейнольдсово напряжение,  $C_1, C_2, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{1T}, C_{s\rho}, C_\rho, C_T$  — достаточно хорошо известные [7] эмпирические постоянные;  $P = v_t \left( \frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2$  — порождение энергии турбулентности за счет градиентов продольной осреднённой скорости. Уравнения математической модели могут быть обезразмерены с использованием масштаба скорости  $U_0$ , масштаба длины  $D$  — диаметра тела и масштаба плотности  $a\rho_0 D$  ( $a = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_s}{dy}$  — градиент плотности невозмущённой жидкости).

Переменная  $x$  в исследуемых в настоящей работе задачах играет роль времени; в начальном сечении  $x = x_0$  задаются распределения  $U_1, e, \varepsilon$  согласованные с экспериментальными данными [10, 11];  $\langle \rho_1 \rangle$  и  $\langle \rho'^2 \rangle$  полагались нулевыми. Для классического турбулентного следа за цилиндром начальные данные задавались при  $x/D = 625$ ; для безимпульсного следа при  $x/D = 15$ . Исходя из физических соображений граничные условия полагались следующими:

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial \langle v' \rho' \rangle}{\partial y} = \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial y} = \langle \rho_1 \rangle = 0, \quad y = 0, \quad x \geq x_0;$$

$$U_1 = e = \varepsilon = \langle \rho_1 \rangle = \langle v' \rho' \rangle = \langle \rho'^2 \rangle = 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad x \geq x_0.$$

Вычисления проводились на основе конечноразностного алгоритма [6, 8, 9], консервативного по отношению к закону сохранения суммарного избыточного импульса

$$J(x) = \rho_0 \int_0^{+\infty} U_1 dy = J(x_0), \quad x \geq x_0.$$

Алгоритм решения задачи сводится к последовательному численному интегрированию уравнений математической модели на каждом слое по переменной  $x$ . Граничные условия из бесконечности сносились на границу  $y = Y$  прямоугольника  $x_0 \leq x \leq X$ ,  $0 \leq y \leq Y$ . Величина  $Y$  выбиралась достаточно большой.

Использовались разнесенные равномерные разностные сетки по пространственной переменной  $y$ . Величины  $U_1$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$ ,  $\langle v'^2 \rangle$ ,  $\langle \rho_1 \rangle$ ,  $\langle \rho'^2 \rangle$  вычислялись в узлах основной сетки  $y_i = (i-1)h_y$ ,  $i = 1, \dots, N_y$ ;  $h_y$  — шаг сетки. Величины вертикальной компоненты вектора потока массы  $\langle v' \rho' \rangle$  находились в узлах вспомогательной сетки  $\bar{y}_i = (i-0.5)h_y$ ,  $i = 1, \dots, N_y$ .

## 2. Результаты расчетов

Динамика плоских турбулентных следов в однородной жидкости подробно численно исследовалась в работах [3, 7–9, 12–15] (в них можно найти более подробную библиографию). Применялись различные модели турбулентности, включая модель Роди [7–9]. Поэтому основное внимание в настоящей работе уделено характеристикам поля плотности (как уже отмечалось выше, плотность жидкости является линейной функцией температуры).

Будем называть математической Моделью 1 систему уравнений (1)–(6). Если к уравнению (5) применить локально-равновесное усечение [7], то для величины вертикальной компоненты потока массы получим хорошо известное алгебраическое представление

$$-\langle v' \rho' \rangle = \frac{1}{C_{1T}} \frac{\langle v'^2 \rangle e}{\varepsilon} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} = K_\rho \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}. \quad (11)$$

При этом уравнение (4) можно переписать в виде

$$U_0 \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_\rho \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial K_\rho}{\partial y} \frac{d \rho_s}{dy}. \quad (12)$$

Назовем математической Моделью 2 систему уравнений (1)–(3), (6), (12) с алгебраическим представлением (11). В Модели 3 уравнения (1)–(3), (12) аналогичны уравнениям Модели 2; дисперсия флуктуаций плотности находится из алгебраического соотношения, являющегося следствием локально-равновесного усечения (6) и представления (11)

$$\langle \rho'^2 \rangle = \frac{2}{C_T} \frac{e}{\varepsilon} K_\rho \left( \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} \right)^2. \quad (13)$$

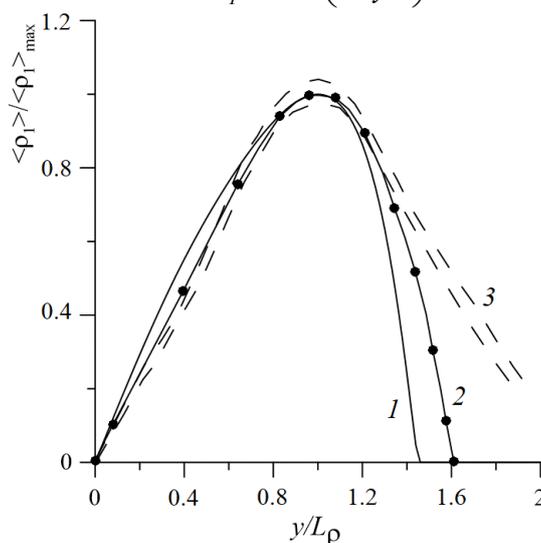


Рис. 1. Сопоставление рассчитанного дефекта плотности с результатами измерений [1] и теоретического анализа [2]

Рассчитанное на основе Модели 1 поле плотности (температуры) сопоставляется на Рис. 1 с результатами измерений [1] и расчётами по модели вихревой вязкости [2]. Характерный размер  $L_\rho$  определяется следующим образом:  $\langle \rho_1(x, L_\rho) \rangle = \max_{0 \leq y \leq Y} \langle \rho_1(x, y) \rangle = \langle \rho_1 \rangle_{\max}$ . Кривая 1 — результаты настоящих расчётов по модели 1; 2 — соответствует расчётам [2]; 3 — результаты обработки экспериментальных данных [1]. Рис. 1 демонстрирует удовлетворительное согласие результатов расчётов с результатами других авторов. В значительно более ранней работе с участием авторов [9] с применением модели, близкой к Модели 1, отмечалось хорошее согласие с известными экспериментальными данными по полю температуры в следе за нагретым цилиндром в однородной жидкости.

Анализ результатов численного моделирования показывает, что на больших расстояниях от тел в пассивно стратифицированной жидкости вырождение турбулентных следов выходит на автомодельный режим, характеризующийся соответствующими законами вырождения. Для классического турбулентного следа за буксируемым цилиндром в автомодельном режиме справедливы представления ( $\eta = y/L_{1/2}(x)$ ):

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{10}(x)H_1(\eta), \quad e = e_0(x)H_2(\eta), \quad \langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_1 \rangle_{m1} H_3(\eta), \\ \langle v' \rho' \rangle &= \langle v' \rho' \rangle_{01} H_4(\eta), \quad \langle \rho'^2 \rangle = \langle \rho'^2 \rangle_{01} H_5(\eta); \\ U_{10}(x) &\sim 1/\sqrt{x}, \quad e_0(x) \sim 1/x, \quad \langle \rho_1 \rangle_{m1} \sim L_{1/2}(x) \sim \sqrt{x}, \\ \langle v' \rho' \rangle_{01} &\sim L_{1/2}(x)\sqrt{e_0(x)} = const, \quad \langle \rho'^2 \rangle_{01} \sim L_{1/2}^2(x) \sim x. \end{aligned} \quad (14)$$

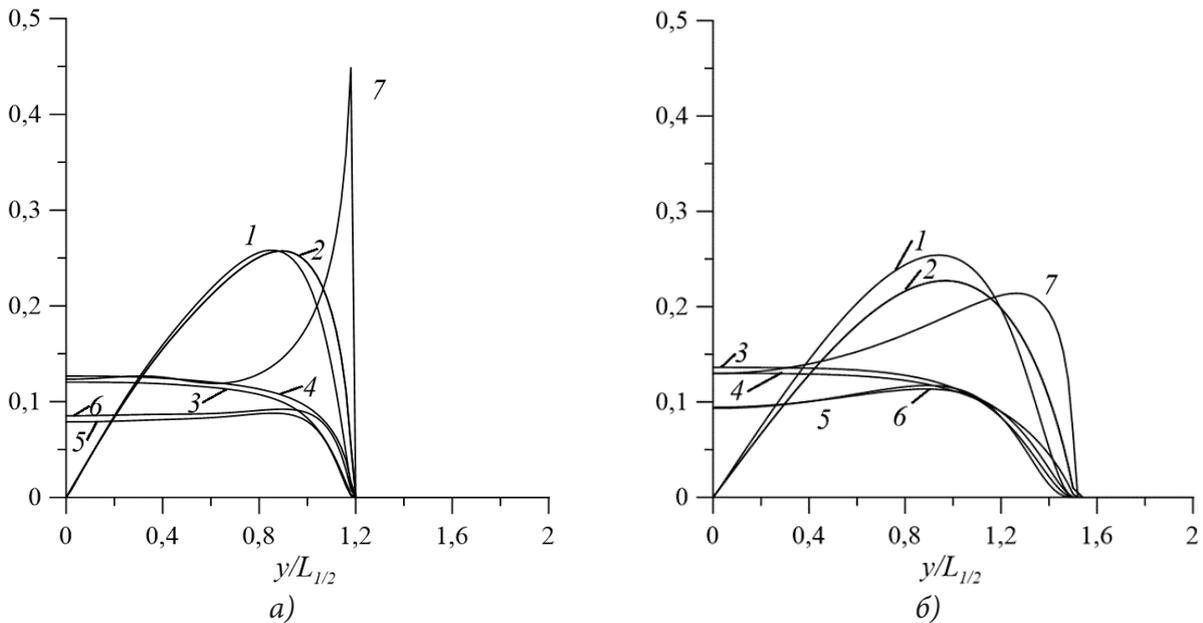


Рис. 2. Автомодельные представления дефекта плотности, вертикальной компоненты вектора потока массы и дисперсии флуктуаций плотности

Для безимпульсного следа (характеристики турбулентного поля скорости вычислены в [15]):

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{10}(x)\Theta_1(\eta), \quad e = e_0(x)\Theta_2(\eta), \quad \langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_1 \rangle_{m1} \Theta_3(\eta), \\ \langle v' \rho' \rangle &= \langle v' \rho' \rangle_{01} \Theta_4(\eta), \quad \langle \rho'^2 \rangle = \langle \rho'^2 \rangle_{01} \Theta_5(\eta); \\ U_{10}(x) &\sim x^{-1.59}, \quad e_0(x) \sim x^{-1.384}, \quad \langle \rho_1 \rangle_{m1} \sim L_{1/2}(x) \sim x^{0.308}, \\ \langle v' \rho' \rangle_{01} &\sim L_{1/2}(x)\sqrt{e_0(x)} \sim x^{-0.384}, \quad \langle \rho'^2 \rangle_{01} \sim L_{1/2}^2(x) \sim x^{0.616}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $L_{1/2}(x)$  — полуширина следов, определяемая из соотношения  $e(x, L_{1/2}) = e(x, 0) / 2 = e_0(x) / 2$ .

Величина аргумента  $x$  в соотношениях автомодельности обычно записывается в виде  $\xi = x - x_{01}$ ,  $x_{01}$  — виртуальное начало; мы полагаем  $x_{01} = 0$ .

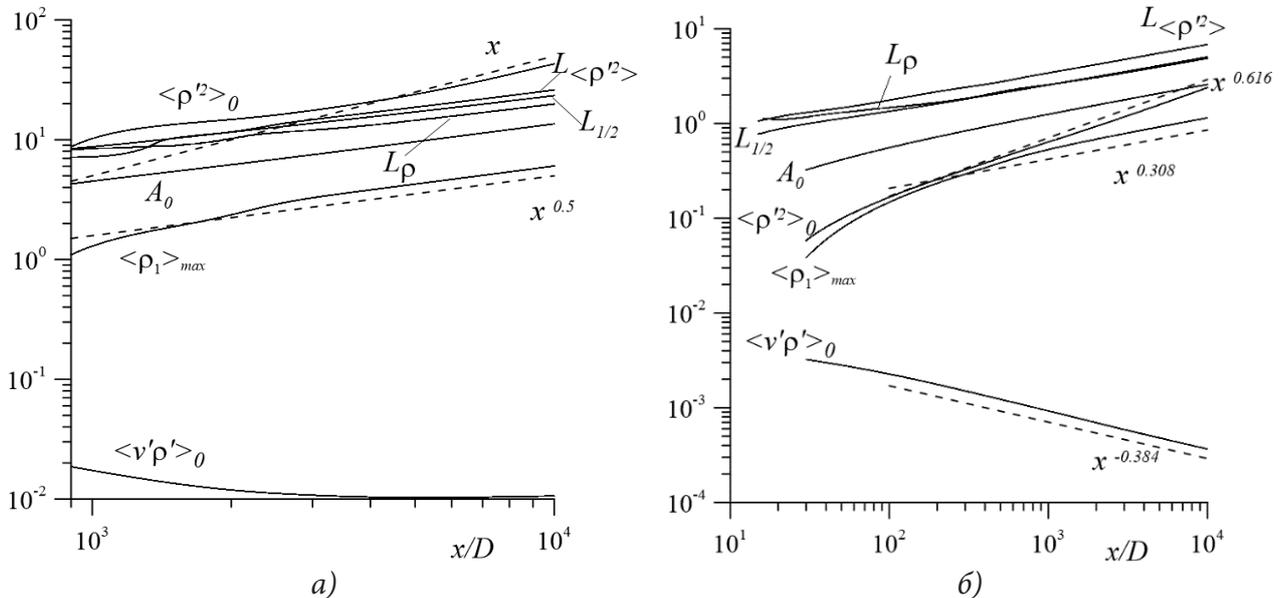


Рис. 3. Изменение характерных масштабов турбулентности с ростом расстояния от тела

Автомодельные представления дефекта плотности, вертикальной компоненты вектора потока и дисперсии флуктуаций плотности для классического турбулентного следа представлены на Рис. 2а. Кривые 1, 2 — автомодельные распределения дефекта плотности  $\langle \rho_1 \rangle / L_{1/2}$ , рассчитанные по Моделям 1, 2; кривые 3, 4 — автомодельные распределения вертикальной компоненты потока массы  $\langle v' \rho' \rangle / \sqrt{e_0(x)} L_{1/2}$ , вычисленные на основе Моделей 1, 2; кривые 5, 6, 7 — автомодельное распределение дисперсии флуктуаций плотности  $\langle \rho'^2 \rangle / L_{1/2}^2$ : 5 — соответствует Модели 1; 6 — вычисленное на основе Модели 2 с использованием сеточной аппроксимации (11)

$$\langle v' \rho' \rangle_{i+1/2}^{n+1} = \frac{(K_\rho)_i^{n+1} + (K_\rho)_{i+1}^{n+1}}{2} \frac{\langle \rho \rangle_{i+1}^{n+1} - \langle \rho \rangle_i^{n+1}}{h_y}; \quad (16)$$

7 — результаты, полученные с применением (16) и соотношения (13) (Модель 3)

$$\langle \rho'^2 \rangle_{i+1/2}^{n+1} = \frac{2}{C_T} \frac{(K_\rho)_i^{n+1} + (K_\rho)_{i+1}^{n+1}}{2} \left( \frac{\langle \rho \rangle_{i+1}^{n+1} - \langle \rho \rangle_i^{n+1}}{h_y} \right)^2 \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{e}{\varepsilon} \right)_{i+1}^{n+1} + \left( \frac{e}{\varepsilon} \right)_i^{n+1} \right].$$

Можно видеть, что локально-равновесное усечение (11) уравнения (5) приводит к заметно-му, но не столь значительному изменению автомодельных профилей  $\langle \rho_1 \rangle$  и  $\langle v' \rho' \rangle$ . Что же касается величины  $\langle \rho'^2 \rangle$ , определяемой по Модели 3, то отклонения во всей области поперечного сечения (в особенности в окрестности внешней границы) следа весьма существенны. Аналогично на рис. 2б приведены автомодельные распределения этих величин для безымпурсного турбулентного следа. Можно также видеть значительные отклонения рассчитанных на основе уравнения (6) и алгебраического соотношения (13) автомодельных распределений дисперсии флуктуаций (кривая 7). Эффекты алгебраического усечения вблизи внешней границы здесь менее выражены, что, по-видимому, объясняется быстрым вырождением [8] с расстоянием от тела источниковых слагаемых порождения в уравнениях (2), (3). Обращает на себя внимание поведение кривых 1, 2 на рис. 2. Можно видеть, что максимальные значения автомодельных распределений дефекта плотности и в классическом, и в безымпурсном следах значительно меньше единицы, что соответствует неполному перемешиванию жидкости

внутри турбулентного следа. Жидкость в следах остаётся стратифицированной, но со стратификацией, отличной от стратификации невозмущённой среды [16].

Рассчитанные с применением математической Модели 1 характерные безразмерные масштабы турбулентности в зависимости от расстояния от тела приведены на рис. 3. Рис. 3а соответствует турбулентному следу за буксируемым цилиндром; рис. 3б — безимпульсному турбулентному следу. Здесь приняты обозначения:  $\langle \rho'^2 \rangle_0$  — осевое значение дисперсии флуктуаций плотности;  $A_0$  — осевое значение масштаба энергонесущих [17] вихрей  $A = \left( \frac{2e}{3} \right)^{3/2} / \varepsilon$ ;  $\langle \rho_1 \rangle_{\max}$  — максимальное значение дефекта плотности в заданном сечении  $x$ ;  $\langle v' \rho' \rangle_0$  — осевое значение величины вертикальной компоненты вектора потока массы. Характерный масштаб длины  $L_{\langle \rho'^2 \rangle}$  определялся из соотношения  $\langle \rho'^2(x, L_{\langle \rho'^2 \rangle}) \rangle = 0,5 \langle \rho'^2(x, 0) \rangle$ . Другие масштабы турбулентности и объяснение их поведения изложены в [8, 15]. Особенности вырождения безимпульсного турбулентного следа сказываются на характеристиках поля плотности. Результаты, приведенные на рис. 3, согласуются с соотношениями (14), (15). Анализируя поведение кривых на этом рисунке, можно видеть, что  $L_{\langle \rho'^2 \rangle}$  в классическом следе незначительно больше  $L_{1/2}$  на больших расстояниях от тел; в безимпульсном следе эффект более заметен. Это обстоятельство было отмечено также в [3]. Что же касается масштаба  $L_\rho$ , то в классическом следе  $L_\rho < L_{1/2}$ ; в безимпульсном масштабы на больших расстояниях эти масштабы практически совпадают. Роль математических моделей 2, 3 в динамике характерных параметров может быть оценена на основе анализа результатов рис. 2.

Остановимся теперь на вопросе о локально-равновесном усечении [7] уравнений (5), (6), приводящем к алгебраическим соотношениям (11), (13). В [5, 6] с применением классической двухпараметрической модели турбулентности на основе метода дифференциальных связей обоснована применимость локально равновесного усечения дифференциального уравнения переноса вертикальной компоненты вектора потока массы (5). Установлено, что при определенном ограничении на значения эмпирических постоянных математической модели и при согласующемся с математической моделью законе роста временного масштаба это соотношение является совместной дифференциальной связью модели. Показана эквивалентность локально-равновесного приближения для вертикальной компоненты вектора потока массы равенству нулю скобки Пуассона для безразмерных значений коэффициента турбулентной диффузии и осредненной плотности. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующих теоретические результаты. Вопрос о построении алгебраических аппроксимаций представляет интерес прежде всего при разработке многомерных численных моделей стратифицированных течений. Важны также понимание механизма усечения уравнений и его физико-математический смысл. В выполненных в настоящей работе вычислительных экспериментах оценивались значения отдельных слагаемых уравнений (5), (6). Локально равновесное усечение заключается в пренебрежении в предположении малости конвективным и диффузионным слагаемыми этих уравнений. Оказалось, что конвективное и диффузионное слагаемые в дальнем следе в уравнении переноса вертикальной компоненты вектора потока массы (5) близки к нулю и локально-равновесное усечение этого уравнения, приводящее к алгебраическому соотношению (11), допустимо. Этот факт согласуется с результатами исследований [5, 6]. Что же касается уравнения переноса дисперсии турбулентных флуктуаций плотности (6), то оказалось, что значения конвективного слагаемого в поперечном сечении следа не могут считаться малыми. Локально-равновесное усечение приводит к появлению значительных погрешностей при использовании алгебраического соотношения (13), что демонстрируется результатами расчетов на рис. 2. Подробное изложение результатов настоящей работы будет опубликовано в [18].

## Заключение

В работе построены основанные на неравновесной алгебраической модели Роди [7] рейнольдсовых напряжений численные модели дальних плоских турбулентных следов в пассивно стратифицированной среде. Выполнен численный анализ автомодельности вырождения характеристик поля плотности в классическом турбулентном следе за цилиндром и безымпulsном следе. Оценивается возможность локально-равновесного усечения уравнений переноса вертикальной компоненты вектора потока массы и дисперсии турбулентных флуктуаций плотности. Дана основанная на вычислительных экспериментах, иллюстрация причин появления значительных погрешностей, возникающих при локально равновесном усечении уравнения переноса дисперсии турбулентных флуктуаций плотности (6).

## Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий. Численные эксперименты проводились в Институте теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН по государственному заданию № 122041400020-6. Постановка задачи и результаты обсуждались авторами совместно.

## Литература

1. *Alexopoulos C. C.* Turbulent Wake in a Passively Stratified Field / C. C. Alexopoulos, J. F. Keffer // *The Physics of Fluids*. – 1971. – V. 14, No 2. – P. 216–224.
2. *Durbin P. A.* Mixing by a turbulent wake of a uniform temperature gradient in the approach flow / P. A. Durbin, J. C. R. Hunt, D. Firth // *Phys. Fluids*. – 1982. – V. 25, No 4. – P. 588–591.
3. *Бабенко В. А.* Моделирование квазиоднородной свободной турбулентности в стратифицированных и реагирующих потоках: дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.-мат. наук: 01.04.14 / Бабенко Валерий Александрович; ИТМО им. А. В. Лыкова НАНБ, 2001. – 375 с.
4. *Ефремов И. А.* Автомодельные решения двух задач свободной турбулентности / И. А. Ефремов, О. В. Капцов, Г. Г. Черных // *Матем. моделирование*. – 2009. – Т. 21, № 12. – С. 137–144.
5. *Гребенев В. Н.* Локально-равновесное приближение в задаче о динамике плоского турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде / В. Н. Гребенев, А. Г. Деменков, Г. Г. Черных // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2024. – Т. 27, № 1(97). – С. 16–28.
6. *Grebenev V. N.* Investigation of the Local Equilibrium Approximation in a Planar Momentumless Turbulent Wake in a Passively Stratified Fluid / V. N. Grebenev, A. G. Demenkov, G. G. Chernykh // *Journal of Engineering Thermophysics*. – 2024. – Vol. 33, Iss. 3. – P. 494–506.
7. *Rodi W.* Turbulence models and their application in hydraulics. A state of the art review / W. Rodi. – University of Karlsruhe, 1980. – 104 p.
8. *Федорова Н. Н.* О численном моделировании плоских турбулентных следов / Н. Н. Федорова, Г. Г. Черных // *Матем. моделирование*. – 1994. – Т. 6, № 10. – С. 24–34.
9. Распространение тепла от линейного источника в плоском турбулентном следе / В. И. Букреев, А. Г. Деменков, В. А. Костомаха, Г. Г. Черных // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1996. – № 5. – С. 115–126.
10. *Hinze J. O.* Turbulence. Second edition / J. O. Hinze. – McGraw-Hill, INC, 1975. – 790 p.
11. *Cimbala J. M.* An experimental investigation of the turbulent structure in a two-dimensional momentumless wake / J. M. Cimbala, W. J. Park // *J. Fluid Mech*. – 1990. – V. 213. – P. 479–509.
12. *Курбацкий А. Ф.* Моделирование нелокального турбулентного переноса импульсов и тепла / А. Ф. Курбацкий. – Новосибирск : Наука, Сиб. Отделение, 1988.

13. *Cherepanov P. Y.* Experimental and numerical study of flat momentumless wake / P. Y. Cherepanov, V. A. Babenko // *Int. J. Heat Fluid Flow.* – 1998. – Vol. 19. – P. 608–622.
14. *Maderich V.* Asymptotic and numerical analysis of momentumless turbulent wakes / V. Maderich, S. Konstantinov // *Fluid Dynamics Research.* – 2010. – Vol. 42, No 42. – 25 p.
15. On self-similar decay of a plane momentumless turbulent wake / G. G. Chernykh, A. G. Demenkov, O. V. Kaptsov, A. V. Schmidt // *Journal of Engineering Thermophysics.* – 2021. – Vol. 30, No 4. – P. 672–678.
16. Development of the turbulized fluid region in stratified medium / O. F. Vasiliev, B. G. Kuznetsov, Yu. M. Lytkin, G. G. Chernykh // *Intern. Symp. on Stratified Flows, Novosibirsk, USSR, August 29 – 31, 1972.* 14 p.
17. *Lumley J. L.* The return to isotropy of homogeneous turbulence / J. L. Lumley, G. R. Newman // *J. Fluid Mech.* – 1977. – Vol. 82, Iss. 1 – P. 161–178.
18. *Деменков А. Г.* Перемешивание в плоских турбулентных следах в пассивно стратифицированной среде / А. Г. Деменков, Г. Г. Черных // *Теплофизика и Аэромеханика.* – 2025. – Т. 32, № 6 (в печати).

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЙСТВИЯ КОНВЕКТИВНОГО И ИМПУЛЬСНОГО ЛУЧЕВОГО ПОТОКОВ НА ТЕПЛОВУЮ ЗАЩИТУ

К. Н. Ефимов, А. С. Якимов

*Томский государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе проводится численное исследование процесса взаимодействия материала тепловой защиты с высокоскоростным потоком газа и с импульсными высокоэнергетическими пучками. Выявлено наличие различных режимов термохимического разрушения теплозащитного покрытия при таких совместных комплексных воздействиях конвективного и импульсного лазерного потоков тепла. Получена информация о долях вкладов в экранировку высокоэнергетического потока продуктов пиролиза, поверхностной абляции и термомеханического разрушения.

**Ключевые слова:** теплообмен, тепловая защита, термохимическое разрушение, импульсные высокоэнергетические воздействия, экранировка, пиролиз, абляция, диспергирование.

### Введение

При обтекании высокоскоростным потоком газа тела подвергаются значительным тепловым нагрузкам. Этот эффект может дополнительно усиливаться за счет лучевого потока. Происходящие при этом физико-химические процессы с материалом тела в свою очередь оказывают влияние на эти эффекты и включают в себя внутренний пиролиз, внешнюю абляцию с сублимацией и внешнее диспергирование частиц материала этого тела. Сложный и взаимосвязанный характер протекания всех вышеописанных явлений требует проведения численного моделирования в сопряженной постановке.

### 1. Постановка задачи

На рис. 1 представлена геометрия тела, обтекаемого потоком химически равновесного воздуха. Сферическое затупление состоит из пронизаемого материала для фильтрации охлаждающего воздуха, коническая часть выполнена из сплошного материала. На подветренной стороне конической части тела в окрестности плоскости симметрии моделируется область «пятна» импульсного высокоэнергетического излучения. Характеристики течения в набегающем потоке находятся из решения квазистационарных уравнений пограничного слоя для химически равновесного воздуха при различных режимах течения [1].

Согласно [2] для учета ослабления падающего излучения используется формула аналогичная по виду закону Бугера — Ламберта:

$$q_r = q_w \exp(-\zeta(\rho\nu)_z). \quad (1)$$

Процесс излучения описывается ступенчатой функцией времени [3]:

$$\begin{cases} W(t) = 0, t < t_{2i-1} \\ W(t) = 1, t_{2i-1} \leq t \leq t_{2i}, i = 1, 2, \dots, N \\ W(t) = 0, t > t_{2i} \end{cases} \quad (2)$$

В дальнейшем «пятно» излучения описывается как область, ограниченная линиями:

$$\Delta_* = (((s_1/R_N) = 3) \leq s/R_N \leq ((s_2/R_N) = 4.771), \eta = 180^\circ) \quad (3)$$

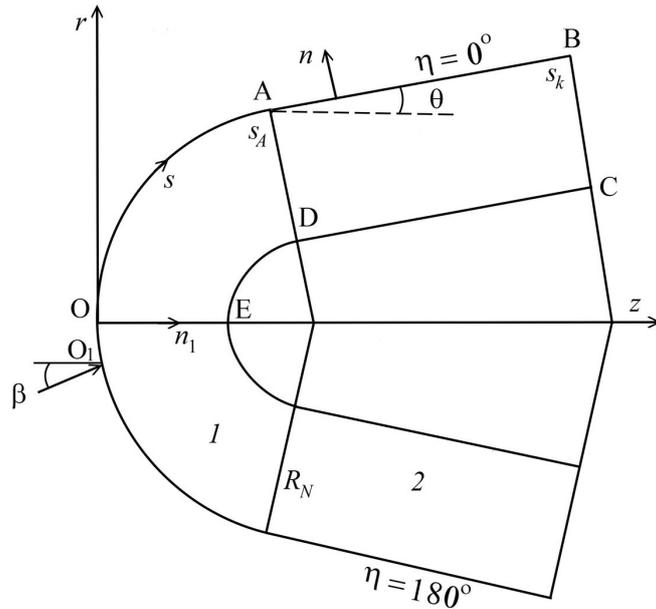
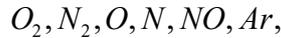


Рис. 1. Геометрия обтекаемого тела

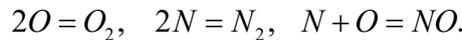
Тепловое состояние пористой сферической оболочки определяется из уравнения сохранения энергии и квазистационарного уравнения для скорости фильтрации охлаждающего газ в порах [1, 4, 5].

Для конической части тела уравнения сохранения энергии и фильтрации продуктов пиролиза в порах используются согласно [4, 6].

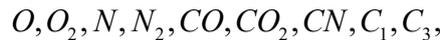
Для набегающего потока воздуха состав моделируется компонентами:



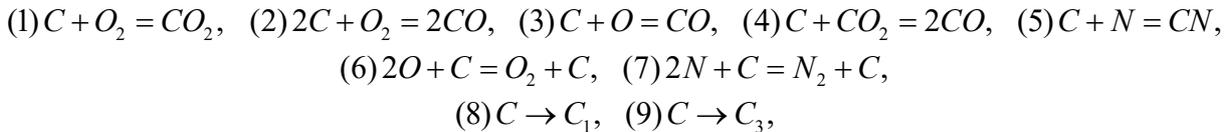
участвующими в химических реакциях:



В химическом составе газовой смеси на поверхности разрушающейся конической части тела выделяются набор компонентов:



которые вступают в следующую систему химических реакций:



здесь  $C$  — обозначение молекул твердофазного углерода материала оболочки. Механизмы протекания реакций (1)–(9) описываются в [4, 6–11]. При достижении в процессе пиролиза плотностью материала оболочки значения предельной плотности  $\rho_{c^*}$  согласно [4] на ее поверхности может возникнуть явление диспергирование частиц  $C$  в пограничный слой со скоростью, равной:  $v_w^s = z_1 v_{1w}$ , где  $v_{1w} = (\rho v)_{1w} / \rho_{cw}$  — скорость фильтрации продуктов пиролиза в порах. Итоговая величина уноса материала с поверхности в результате химических процессов и диспергирования составляет:  $(\rho v)_\Sigma = (\rho v)_{2w} + (\rho v)_{3w} + z_1 v_{1w} \rho_{c^*}$ , где  $(\rho v)_{1w}$  — массовая скорость фильтрации продуктов пиролиза в порах,  $(\rho v)_{2w}$  — унос за счет химических реакций (1)–(5),  $(\rho v)_{3w}$  — унос за счет сублимации материала (8)–(9).

## 2. Результаты и их анализ

Расчеты обтекания тела (рис. 1) проведены при следующих условиях: скорость  $V_\infty = 5300$  м/сек, высота  $H_\infty = 22000$  м, радиус затупления  $R_N = 0.2$  м, начальная толщина оболочки тела  $L_0 = 0.02$  м. В качестве материала пористого затупления бралась пористая сталь с пористостью  $\varphi_1 = 0.34$  [12], материалом конической части является углепластик [5] с начальной плотностью  $\rho_{c0} = 1400$  кг/м<sup>3</sup> и с предельной плотностью  $\rho_{c*} = 1300$  кг/м<sup>3</sup>. Характерная интенсивность импульсного лучевого потока принималась  $q_* = 10^9$  Вт/м<sup>2</sup>. Принималось значение коэффициента  $z_1 = 1$ , для коэффициента  $\zeta = 1$ .

При дальнейшем моделировании брались следующие «пички» излучения:

$$((t_1 = 10.001) \leq t \leq (t_2 = 10.002)), ((t_3 = 10.005) \leq t \leq (t_4 = 10.006)), ((t_5 = 10.009) \leq t \leq (t_6 = 10.010))$$

Для анализа рассматривается динамика изменения параметров задачи в фиксированном сечении с координатами  $s/R_N = 3.0$ .

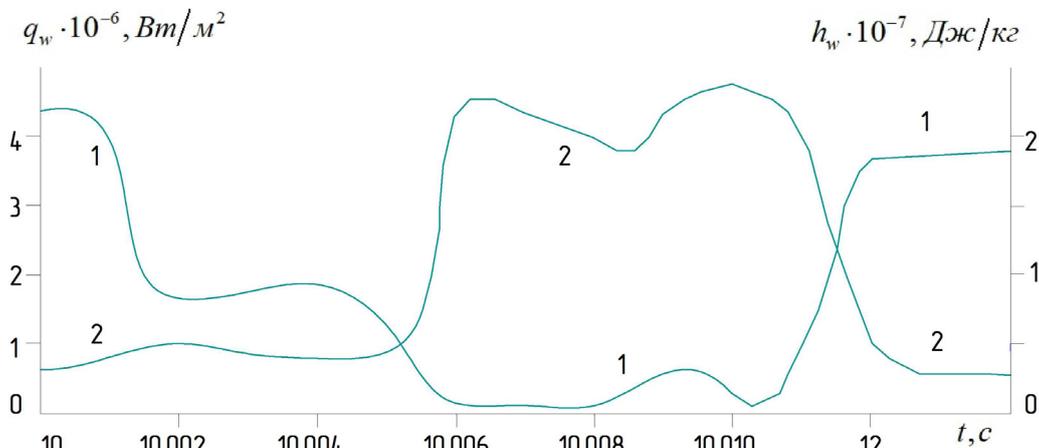


Рис. 2. Распределения по времени конвективного теплового потока  $q_w$  и энтальпии на поверхности тела  $h_w$

На рис. 2 показаны временная динамика изменения конвективного теплового потока  $q_w$  (кривая 1), которая имеет тенденцию к падению величины во время «пичков» излучения и к возрастанию по их окончанию и противоположное поведение величины энтальпии на поверхности тела  $h_w$  (кривая 2) с ростом при поступлении энергии во время «пичков».

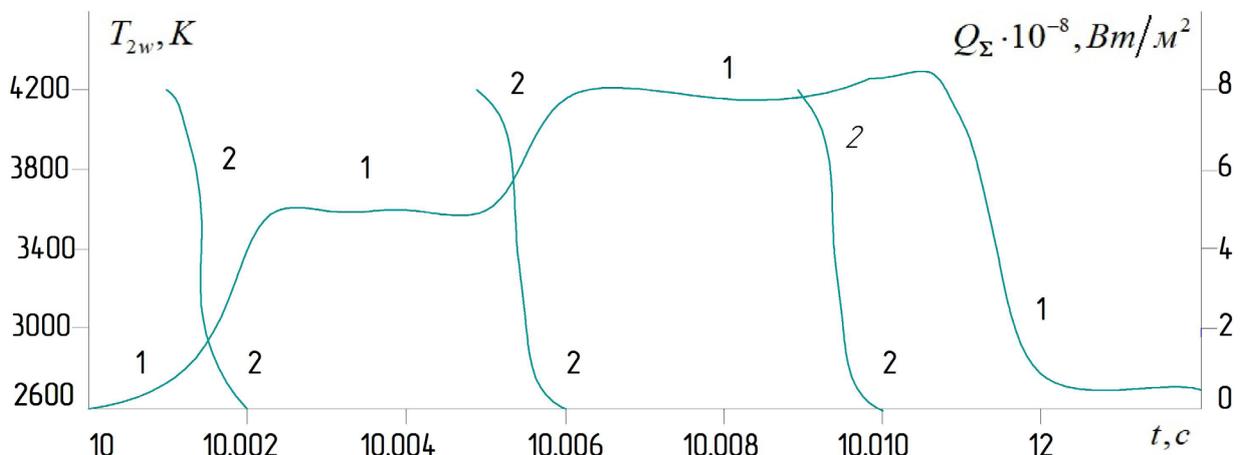


Рис. 3. Распределения по времени температуры поверхности тела  $T_{2w}$  суммарного теплового потока  $Q_\Sigma$

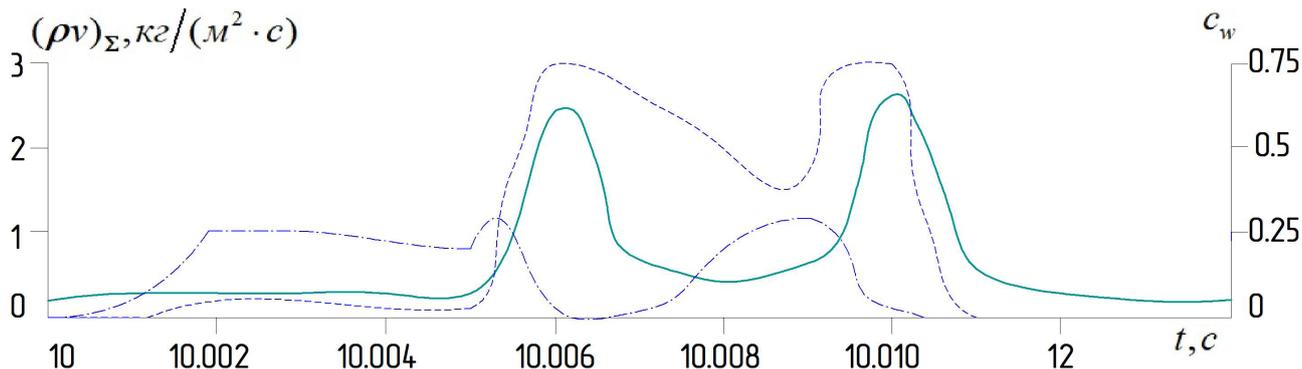


Рис. 4. Распределение по времени суммарного уноса  $(\rho\nu)_{\Sigma}$ , концентраций компонента  $CN - C_{7w}$  и сублимационного компонента  $C_3 - C_{9w}$

На рис. 3 кривая 1 соответствует распределению температуры поверхности тела  $T_{2w}$  и кривая 2 демонстрирует суммарный тепловой поток к поверхности тела  $Q_{\Sigma}$  (кривая 2).

Последовательное прохождение «пиков» излучения приводит к быстрому росту и последующему падению величины суммарного теплового потока  $Q_{\Sigma}$ , которые последовательно ведут к быстрому росту температуры поверхности тела  $T_{2w}$  с некоторым остыванием после завершения очередного «пика». После окончания последовательности «пиков» температура снижается до значений, соответствующих уровню установившегося конвективного теплового потока.

На рис. 4 показаны распределения суммарного уноса  $(\rho\nu)_{\Sigma}$  (сплошная кривая), концентрации компонента  $CN - C_{7w}$  (штрихпунктирная кривая) и компонента  $C_3 - C_{9w}$  (штриховая кривая).

Величина суммарного уноса  $(\rho\nu)_{\Sigma}$  демонстрирует умеренный рост во время прохождения 1-го «пика» излучения с последующими пиками во время прохождения 2-го и 3-го «пиков». Кривые для концентраций компонентов  $CN - C_{7w}$  и для компонента  $C_3 - C_{9w}$  демонстрируют смены их вкладов в величину суммарного уноса и экранировку лучистого потока.

### Заключение

В экранировке лазерного излучения продуктами термохимического разрушения углепластика определяющую роль на начальном этапе взаимодействия излучения с телом играют газообразные продукты пиролиза и частицы к-фазы. При повторном импульсном лучевом нагреве экранировка для  $T_{2w} > 3900$  К может осуществляться преимущественно парами углеродного материала и частицами твердой фазы.

### Литература

1. Ефимов К. Н. Численное исследование влияния вращения на характеристики сопряженного теплообмена при сверхзвуковом обтекании конуса, затупленного по сфере / К. Н. Ефимов, В. А. Овчинников, А. С. Якимов // Теплофизика высоких температур. – 2018. – Т. 56, № 2. – С. 253–260.
2. Домбровский Л. А. Методика расчета теплового разрушения углепластика под действием интенсивного инфракрасного излучения / Л. А. Домбровский, Э. П. Юкина, А. В. Колпаков, В. А. Иванов // Теплофизика высоких температур. – 1993. – Т. 31, № 4. – С. 619–625.
3. Рыкалин Н. Н. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов. Справочник / Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, И. В. Зуев, А. Н. Кокора. – Москва : Машиностроение, 1985. – 496 с.
4. Гришин А. М. Сопряженные и нестационарные задачи механики реагирующих сред / А. М. Гришин, В. М. Фомин. – Новосибирск : Наука, 1984. – 319 с.

5. Гришин А. М. Математическое и физическое моделирование тепловой защиты / А. М. Гришин, А. Н. Голованов, В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов. – Томск : Изд-во Томского ун-та. – 2011. – 358 с.
6. Полежаев Ю. В. Тепловая защита / Ю. В. Полежаев, Ф. Б. Юревич. – Москва : Энергия / – 1976. – 392 с.
7. Горский В. В. Теоретические основы расчета абляционной тепловой защиты / В. В. Горский. – Москва : Научный мир, 2015. – 688 с.
8. Зинченко В. И. Режимы термохимического разрушения углефенольного композиционного материала под действием теплового потока / В. И. Зинченко, А. С. Якимов // Физика горения и взрыва. – 1988. – Т. 24, № 2. – С. 141–149.
9. Скала С. Сублимация графита при гиперзвуковых скоростях / С. Скала, К. Джильберт // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – Т. 3, № 9. – С. 87–126.
10. Никитин П. В. Разрушение композиционного материала на органической основе в высокотемпературном потоке газа / П. В. Никитин, В. М. Овсянников, Н. В. Холодков // Инженерно-физический журнал. – 1986. – Т. 50, № 3. – С. 363–373.
11. Toshiyuki S. Experimental Study of Graphite Ablation in Nitrogen Flow / S. Toshiyuki, F. Kazuhisa, A. Keisuke, S. Takeharu // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. – 2008. – Vol. 22, No 3. – P. 382–389.
12. Алифанов О. М. Экспериментальное исследование метода определения коэффициента внутреннего теплообмена из решения обратной задачи / О. М. Алифанов, А. П. Трянин, А. Л. Ложкин // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 460–469.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОЭМИССИОННОГО ЭЛЕМЕНТА В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ

К. Н. Ефимов, А. С. Якимов

*Томский государственный университет*

**Аннотация.** В данной работе численно моделируется процесс использования термоэмиссионного элемента в составе системы тепловой защиты при нагреве высокоэнергетическим потоком. Проведено исследование поведения такого термоэмиссионного преобразователя как в пассивном, так и активном режимах работы. Показано, что при преобразовании тепловой энергии, получаемой от набегающего потока, помимо выработки электроэнергии происходит снижение температуры составных частей такого элемента. Получено качественное согласие с известными данными.

**Ключевые слова:** тепловая защита, термоэмиссионный элемент, эмиттер, коллектор, теплообмен.

### Введение

При движении высокоскоростных аппаратов в атмосфере их поверхности могут подвергаться воздействию высокоэнтальпийных потоков воздуха. При длительном взаимодействии материала оболочки тела с такими потоками возникает необходимость использования систем защиты от такого воздействия.

В настоящей работе исследуется поведение термоэмиссионного элемента, который интегрирован в корпус летательного аппарата с целью работы в составе системы тепловой защиты. В таком элементе одновременно протекают множество физических процессов. В силу дороговизны экспериментальных исследований таких термоэмиссионных систем целесообразно применять математическое моделирование.

### 1. Постановка задачи

Рис. 1 дает представление о геометрии обтекаемого воздушным потоком тела.

Рис. 2 иллюстрирует способ использования термоэмиссионного эффекта в системе тепловой защиты путем интеграции термоэмиссионного элемента (ТМЭ) в оболочку конической части обтекаемого тела.

Геометрически ТМЭ представляет собой составную конструкцию, состоящую из набора слоев. Слой 1 является слоем тантала  $Ta$  или сплава тантал-вольфрам  $Ta + W$ , слой 2 является эмиттерной изоляцией из карбида циркония  $ZrC$ , слой 3 включает в себе изолятор (2), сам эмиттер и токоввод из вольфрама  $W$  (3), слой 4 включает в себе токовывод (4) из молибдена  $Mo$ , сам коллектор (4) из молибдена  $Mo$  и изолятор (5), слой 5 является теплоносителем из оксида алюминия  $Al_2O_3$ , в слое 6 размещается охлаждающий теплоноситель из воздуха или гелия  $He$ , слой 7 является теплоносителем из оксида алюминия  $Al_2O_3$ , слой 8 служит в качестве потребителя возникающего в процессе работы ТМЭ электрического тока, слой d — межэлектродный зазор (МЭЗ) между слоем эмиттера 3 и слоем коллектора 4.

На основании оценок времен релаксации в газовой и конденсированной фазах [1] характеристики сопряженного тепло- и массообмена находятся из решения квазистационарных уравнений пограничного слоя для химически равновесного воздуха при различных режимах течения.

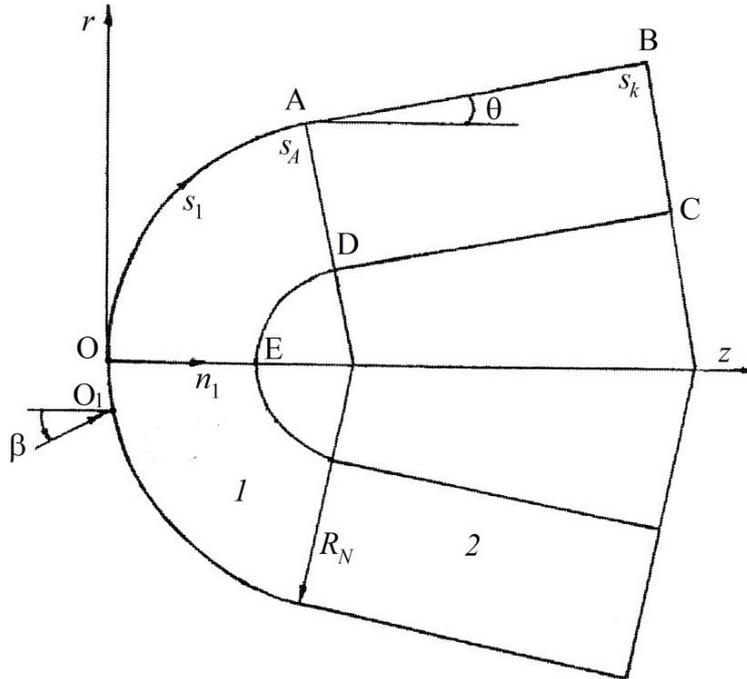


Рис. 1 Геометрия обтекаемого тела:  
1 — сферическое затупление, 2 — коническая часть

Для определения теплового состояния ТМЭ на конической части обтекаемого тела используется система нестационарных уравнений сохранения энергии в виде для слоев:

$$C_{pi}(T_i)\rho_i \frac{dT_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial n} \left[ \lambda_i(T_i) \frac{\partial T_i}{\partial n} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \lambda_i(T_i) \frac{\partial T_i}{\partial s} \right] + \frac{\lambda_i(T_i)}{r} \left( \frac{\partial T_i}{\partial s} \sin \theta - \frac{\partial T_i}{\partial n} \cos \theta \right) + G_i^V, \quad (1)$$

где  $i = 1, 2, 4, 5, 6, 7$ ,  $r = (R_N - n) \cos \theta + (s - s_A) \sin \theta$ ,  $T_i$ ,  $C_{pi}$ ,  $\lambda_i$ ,  $\rho_i$  — температура, коэффициенты удельной теплоемкости, теплопроводности, плотности материалов слоев ТМЭ.

Тепловые потоки для поверхности эмиттера слоя 3 и поверхности коллектора слоя 4, разделенных межэлектродным зазором МЭЗ представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_3 &= -(q_1 + q_e + q_{Cs}), \quad q_4 = q_2 + q_e + q_{Cs}, \\ q_1 &= J(\varphi_1(T_3/T_{Cs})/e + 2kT_3/e), \quad q_2 = J(\varphi_2(T_4/T_{Cs})/e + 2kT_3/e), \\ q_e &= \varepsilon_s \sigma (T_3^4 - T_4^4), \quad q_{Cs} = (\lambda_{Cs}/d)(T_3 - T_4). \end{aligned} \quad (2)$$

Объемное выделение тепла для эмиттера и коллектора может быть записано как:

$$G_3^V = \xi_1 I_1^2 / S_1^2, \quad G_4^V = \xi_2 I_2^2 / S_2^2, \quad (3)$$

где  $I_1 = 2\pi R_1 \int_{s_1}^s J ds$ ,  $I_2 = 2\pi R_1 \int_s^{s_2} J ds$  — силы токов в эмиттере и коллекторе;

$\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — эффективная работа выхода электронов для материалов эмиттера и коллектора;

$J$  — вольтамперная характеристика изотермического термоэлектронного преобразователя, которая зависит от  $\Delta V$  — разности потенциалов между эмиттером и коллектором;

$S_1 = 2\pi\delta_3(R_N - L_3 + \delta_3/2)$ ,  $S_2 = 2\pi\delta_4(R_N - L_4 + \delta_4/2)$ ;  $R_N$  — радиус сферического затупления.

Для расчетов вольтамперной характеристики использовались алгоритмы [2, 3, 4] и рассматривался вариант величины МЭЗ  $d = 2.5 \cdot 10^{-4}$  м и давления насыщенных паров цезия  $Cs$   $P_{Cs} = 666.6$  Па = 5 мм рт.ст, что соответствует температуре резервуара с  $Cs$  равной 606.9 К.

Кривая Рейзора [5] для эмиттера бралась равной вакуумной работе вольфрама  $W$   $\varphi_1 = 5$  эв, для коллектора бралась кривая Рейзора для вакуумной работы молибдена  $Mo$   $\varphi_2 = 4.32$  эв.

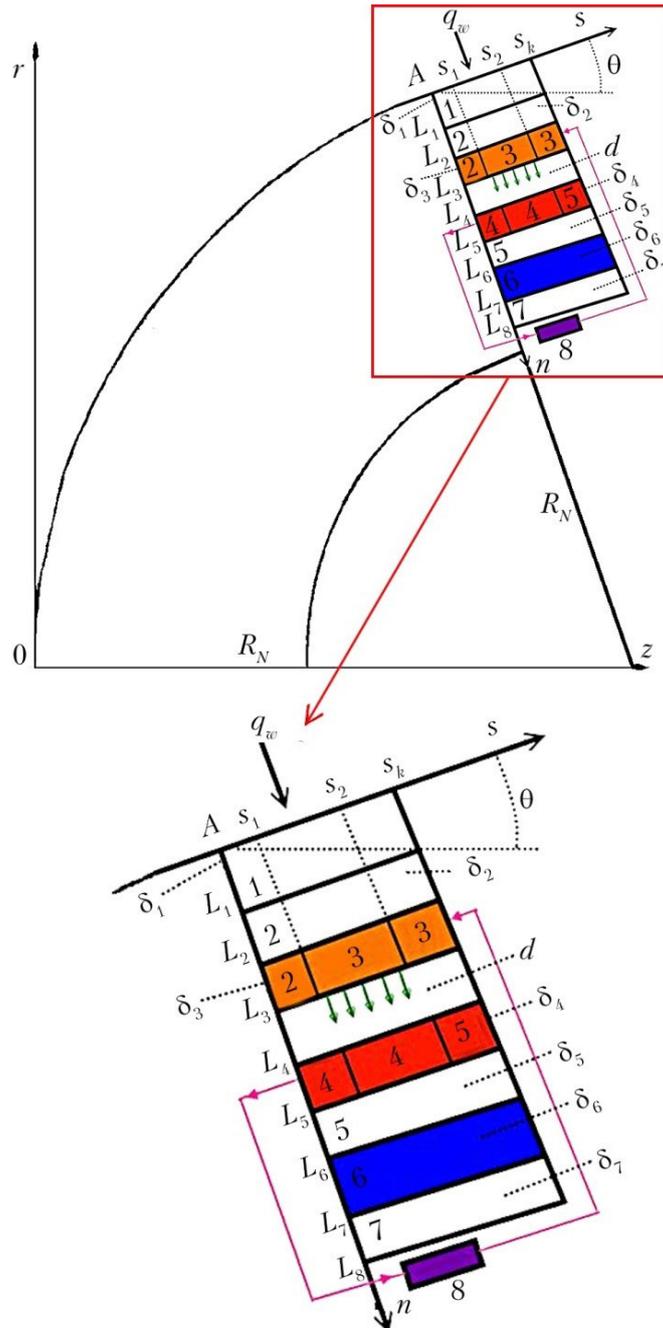


Рис. 2. Схема интеграции термоэмиссионного элемента в систему тепловой защиты

Коэффициент теплопроводности цезия  $Cs$  брался из [6]. Коэффициенты теплопроводности для материала эмиттера и коллектора брались из [7, 8]

Ниже приводятся геометрические и теплофизические входные данные:

$\delta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  м,  $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-3}$  м,  $\delta_3 = 1 \cdot 10^{-3}$  м,  $\delta_4 = 1 \cdot 10^{-3}$  м,  $\delta_5 = 1 \cdot 10^{-3}$  м,  $\delta_6 = 1 \cdot 10^{-3}$  м,  $\delta_7 = 1 \cdot 10^{-3}$  м,  $L_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  м,  $L_2 = 3 \cdot 10^{-3}$  м,  $L_3 = 4 \cdot 10^{-3}$  м,  $L_4 = 4.25 \cdot 10^{-3}$  м,  $L_5 = 5.25 \cdot 10^{-3}$  м,  $L_6 = 6.25 \cdot 10^{-3}$  м,  $L_7 = 7.25 \cdot 10^{-3}$  м,  $L_8 = 8.25 \cdot 10^{-3}$  м,  $\rho_1 = 16650$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 6600$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_3 = 19200$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_4 = 10200$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_5 = 3920$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_7 = 3920$  кг/м<sup>3</sup>,  $\varepsilon_1 = 0.203$ ,  $\varepsilon_2 = 0.302$ ,  $\varepsilon_s = 0.250$ ,  $s_A/R_N = 1.484$ ,  $s_1/R_N = 1.584$ ,  $s_2/R_N = 1.984$ ,  $s_K/R_N = 2.084$ ,  $\Delta_1 = 1000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\Delta_2 = 200$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\delta = 10^4$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $L_K = 0.04$  м.

Расчеты обтекания затупленного по сфере конуса с углом полураствора  $\theta = 5^\circ$  потоком воздуха производились для условий обтекания на высоте  $H = 30000$  м со скоростью  $V_\infty = 3360$  м/сек.

## 2. Результаты и их анализ

На рис. 3 представлены распределения температур вдоль поверхности обтекаемого тела. Кривые 1–5 отвечают следующим моментам времени  $t$ : 1 — 20 сек, 2 — 25 сек, 3 — 30 сек, 4 — 40 сек, 5 — 60 сек.

На рис. 4 представлены распределения температур вдоль поверхности эмиттера в те же моменты времени как и на рис. 3.

Сплошные кривые отвечают вариантам учета термоэмиссионного эффекта, штриховые кривые соответствуют варианту моделирования, когда этим эффектом пренебрегается.

Анализ поведения одноименных пар кривых на рис. 3 и 4 показывает, что наблюдается снижение температуры внешней поверхности до 170 град и снижение температуры поверхности эмиттера до 220 град вследствие наличия термоэмиссионного эффекта. Одновременно следует отметить явление снижения его эффективности при приближении температуры поверхности эмиттера в величине 2300 К.

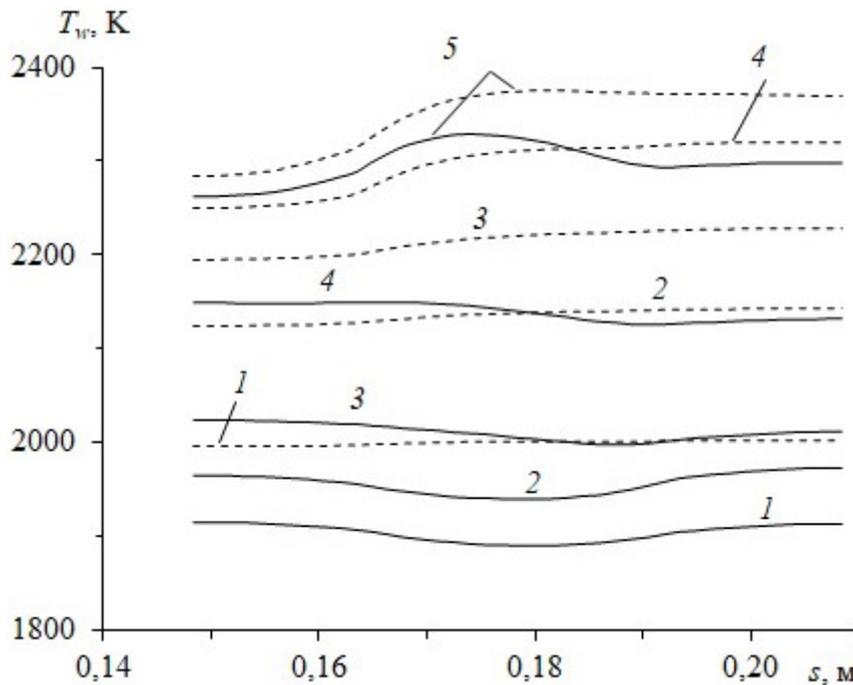


Рис. 3. Зависимости температуры внешней поверхности тела в зависимости от времени

### Заключение

Представлена математическая модель интегрированного термоэмиссионного элемента в составе тепловой защиты высокоскоростного летательного аппарата.

Произведены численные оценки теплового эффекта работы такой системы активной тепловой защиты в виде снижения температурных уровней в элементах оболочки вследствие электронной эмиссии с поверхности эмиттера.

Показана эффективность работы термоэмиссионной тепловой защиты в диапазоне температур эмиттера от 1400 К до 2300 К.

Показано снижение термоэмиссионного эффекта при приближении температуры эмиттера к температурному уровню 2300 К.

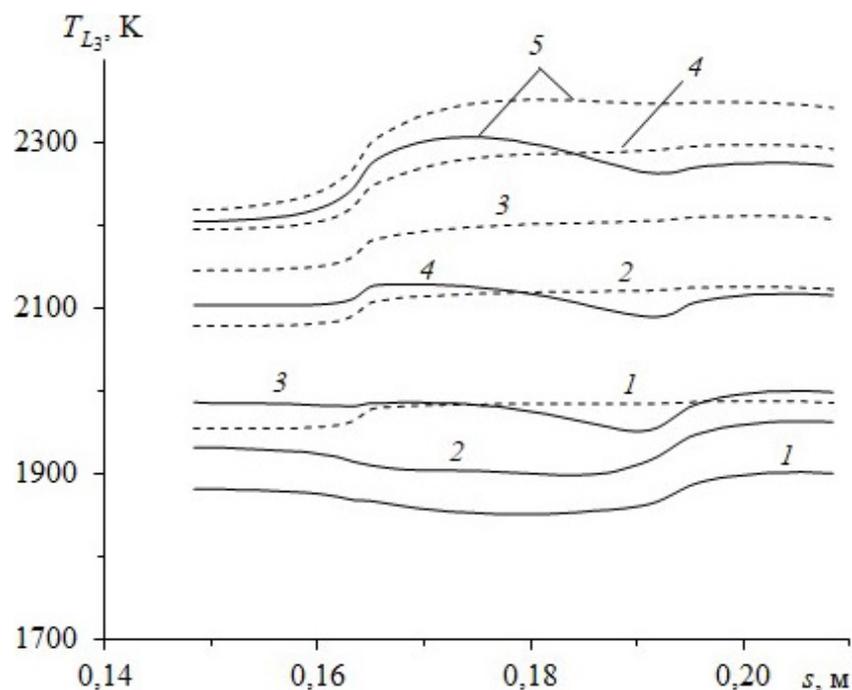


Рис. 4. Зависимости температуры поверхности эмиттера в зависимости от времени

#### Литература

1. Ефимов К. Н. Математическое моделирование влияния вращения на характеристики сопряженного теплообмена при высокоскоростном обтекании затупленного по сфере конуса под углом атаки / К. Н. Ефимов, В. А. Овчинников, А. С. Якимов // Теплофизика и аэромеханика. – 2017. – Т. 24, № 5. – С. 677–689.
2. Бровальский Ю. А. Обобщенный расчет вольт-амперных характеристик и полей температуры термоэмиссионных преобразователей на основе данных испытаний изотермического ТЭП. Термоэмиссионные преобразователи энергии / Ю. А. Бровальский, Н. М. Рожкова, В. В. Синявский, В. Д. Юдицкий. – Москва : ВНИИТ, 1969. – С. 281–294.
3. Коноплев А. А. Эмпирический метод расчета вольт-амперных характеристик разрядного режима термоэлектронного преобразователя / А. А. Коноплев, В. Д. Юдицкий, Л. И. Пушина // Журнал технической физики. – 1975. – Т. 45, Вып. 2. – С. 314–321.
4. Бабушкин Ю. В. Методы расчета вольт-амперных характеристик термоэмиссионных электрогенерирующих сборок / Ю. В. Бабушкин, В. П. Зимин // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309, № 2. – С. 135–139.
5. Razor N. S. Correlation of emission processes for adsorbed alkali films on metal surfaces / N. S. Razor, C. Warner // J. App. Physics. – 1965. – V. 35, No 9. – P. 2589–2599.
6. Ушаков Б. А. Основы термоэмиссионного преобразования энергии / Б. А. Ушаков, В. Д. Никитин, И. Я. Емельянов. – Москва : Атомиздат, 1974. – 288 с.
7. Рябиков С. В. Технология термоэмиссионных преобразователей. Справочник / С. В. Рябиков, В. С. Агеева, В. Б. Елисеев. – Москва : Атомиздат, 1974. – 231 с.
8. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники. Справочник / В. С. Чиркин. – Москва : Атомиздат, 1968. – 484 с.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ГАЗОДИНАМИКИ ЭНЕРГОУСТАНОВОК МОДЕЛЯМИ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. В. Ефремов

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова*

**Аннотация.** Для описания внутренней газодинамики энергоустановок используют различные подходы. Наиболее точным методом исследования является полная трёхмерная постановка, учитывающая все особенности геометрии и протекающих процессов. Но такой подход максимально ресурсозатратен. Однако, существует возможность упростить такую постановку и получать приемлемые результаты, но за более короткие сроки или на менее мощных компьютерах. Ряд задач газовой динамики допускает их решение в нульмерной или одномерной постановке. В работе предлагается упрощённая модель запуска энергоустановки в виде связки 0D – 1D подхода.

**Ключевые слова:** внутренняя газодинамика, среда моделирования, многоуровневое моделирование, численное моделирование, запуск сопла, воспламенение, сопловое течение.

### Введение

Ракетный двигатель является довольно сложной для исследования структурой. Он состоит из подвижной под влиянием изменения внутреннего давления оболочки, твердотопливного заряда с переменной во времени поверхностью горения и воспламенителя. Сопло также имеет свои особенности: оно утоплено внутрь двигателя и заряда и закреплено специальными упругими шарнирами. Более того, такая система специфически работает в момент запуска: необходимо учитывать работу воспламенителя, деформацию за счёт изменения давления, заполнение камеры сгорания, прорыв сопловой заглушки, выход установки на режим... В среде тяжёлых вычислительных программ такая совокупность процессов сложна для моделирования в трёхмерной постановке. Поэтому интерес представляют более простые модели, способные учитывать основные процессы, протекающие при работе энергоустановок. Выбор конкретной математической модели чаще всего обусловлен компромиссом между целями расчёта и используемой вычислительной техникой [1]. В ряде случаев упрощённые модели дают вполне приемлемые результаты. Поэтому весьма целесообразно создать совокупность математических моделей, как самых простых, так и более высокой степени сложности, для различных приближений в иерархической цепочке проектирования объекта.

### 1. Принцип декомпозиции энергоустановки

При работе ракетного двигателя на твёрдом топливе (РДТТ) в его внутреннем пространстве развивается совокупность сложных процессов различной природы (рис. 1). Без знания особенностей этих процессов и влияющих на них факторов невозможно достоверно спрогнозировать параметры энергоустановки [1]. Задача определения оптимальной организации этих процессов решается на этапе проектирования энергоустановки за счёт прогнозирования характеристик системы с помощью математических моделей, учитывающих воздействующие на неё факторы.

Переходя к вопросам внутренней газодинамики следует отметить, что сегодня широко применяются новые подходы к построению математических моделей и информационных систем на их основе. Одним из важнейших инструментов, позволяющих получать качественно новые результаты в области прогнозирования газодинамических и тепловых характеристик,

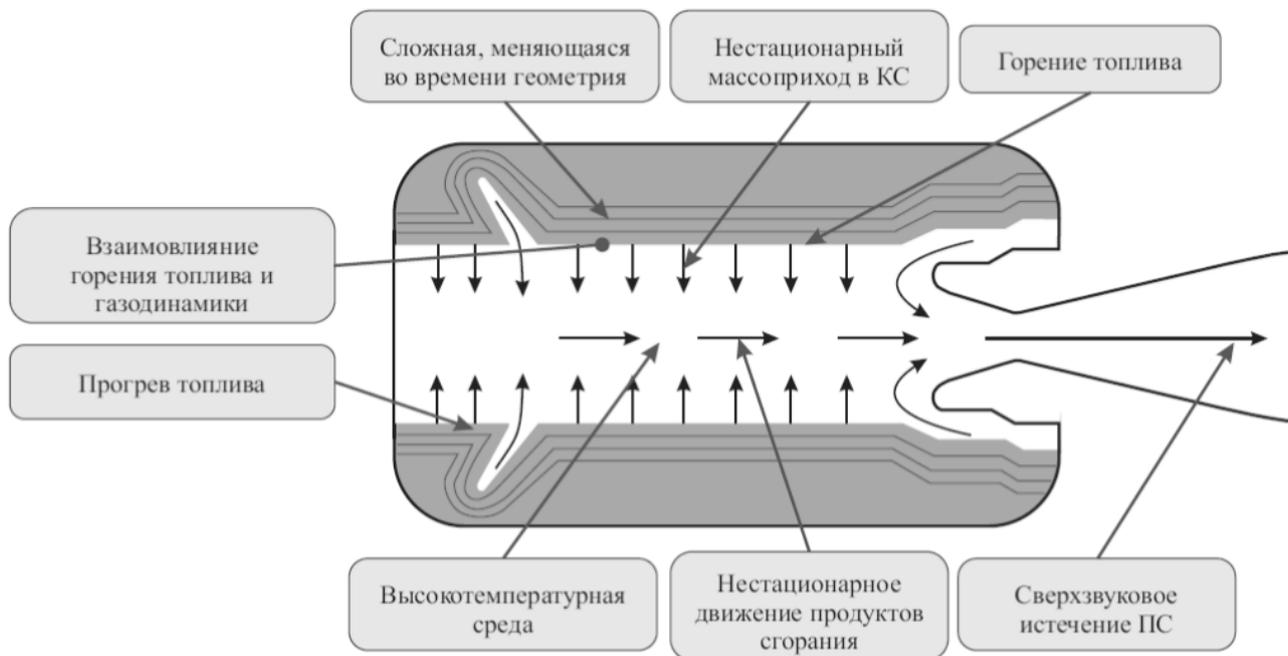


Рис. 1. Совокупность процессов, протекающих в ракетном двигателе

является многоуровневое моделирование, которое даёт возможность изучать особенности течений не только на разных временных и/или пространственных масштабах, но и выстраивать взаимосвязи между ними.

Решение задач внутренней газодинамики ракетного двигателя можно свести к совокупности нескольких задач (рис. 2). Каждый процесс возможно рассмотреть с применением математических моделей различной степени детализации. Процессы в камере сгорания (I) описываются нульмерными моделями, сопловой блок (II – III) — моделями одномерной газодинамики, а истечение продуктов сгорания (IV) и влияние спутного потока (V) — в двумерной постановке. Но в любом случае выбор конкретной математической модели обусловлен компромиссом между целями расчёта и имеющимися вычислительными мощностями.

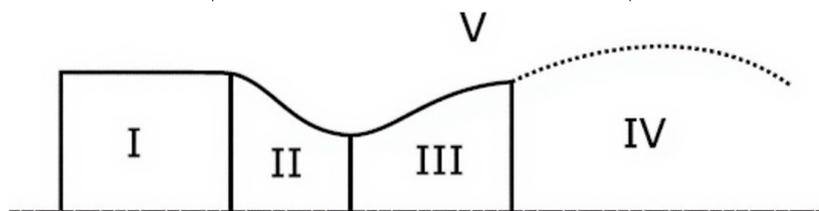
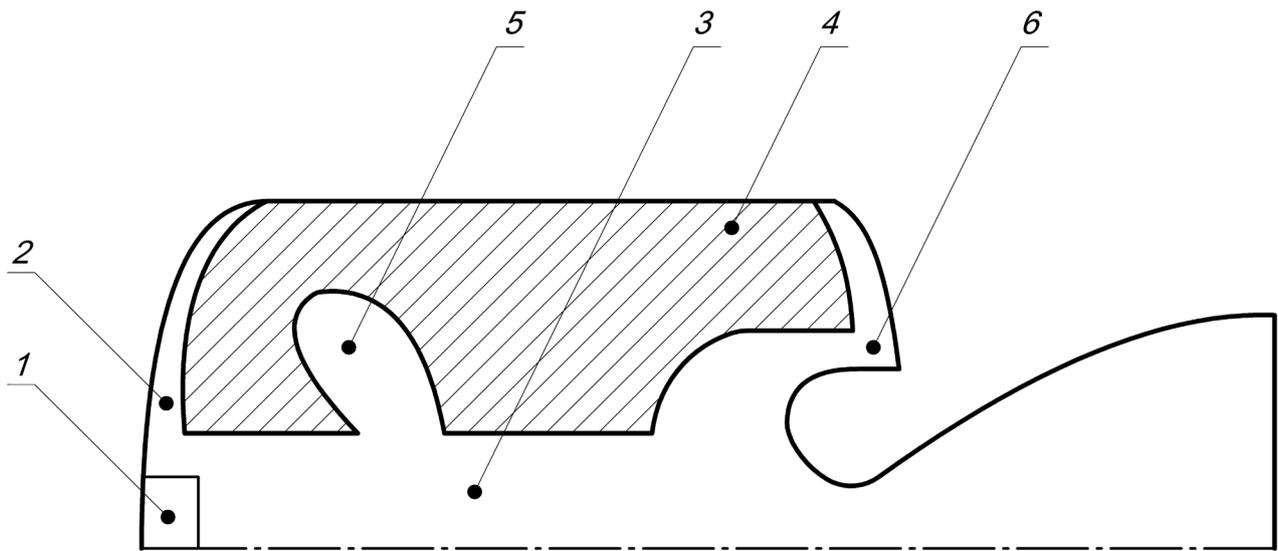


Рис. 2. Схема сопряжения нескольких задач при исследовании ракетного двигателя

Исследуемая энергоустановка (аналог ракетного двигателя на твёрдом топливе) состоит из корпуса, воспламенителя, топливного заряда, соплового блока, узлов систем запуска и управления вектором тяги. Принципиальная схема представлена на рис. 3.

Как говорилось ранее (рис. 1) процесс работы двигателя представляет собой совокупность отдельно (но с взаимным влиянием) протекающих процессов. В принципе декомпозиции (рис. 4) лежит подход, при котором внутренняя газодинамика рассматривается совокупностью нульмерных и одномерных моделей, описывающих отдельные элементы энергоустановки. Например, в одномерной постановке моделируется работа воспламенителя, процессы, протекающие в околосопловой и надсопловой областях, прогрев топлива и газодинамика тракта. Локальный подвод от «зонтика» или других щелевидных участков топливного заряда можно смоделировать в нульмерной постановке. В полной трёхмерной постановке разумно моделировать только изменение поверхности горения топлива (выгорание заряда).



1 — воспламенитель; 2 — околосонная область; 3 — тракт; 4 — твердотопливный заряд;  
5 — зонтичный элемент; 6 — надсопловая область

Рис. 3. Принципиальная схема твердотопливного ракетного двигателя

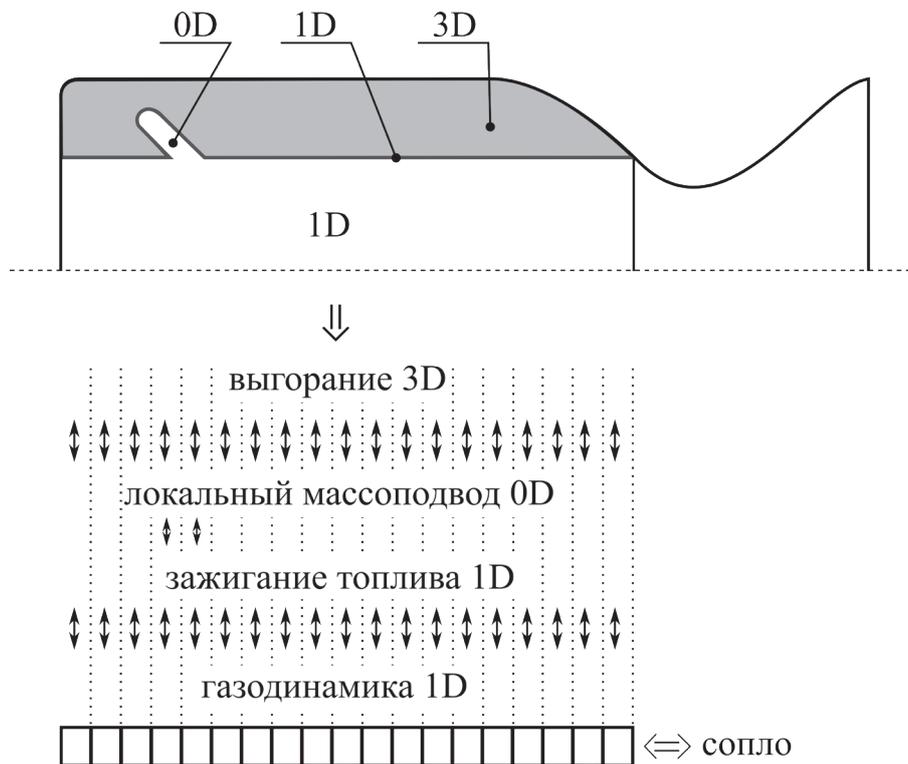


Рис. 4. Пример декомпозиции исследуемого объекта

Приведённый пример показывает насколько удобно разделять рассмотрение и степень детализации различных участков энергоустановки в зависимости от целей расчёта. Декомпозиция исследуемого объекта позволяет получить иерархическую структуру, задающую логику построения программной реализации разноуровневой вычислительной модели.

## 2. Математические модели

Термодинамическая (нульмерная) постановка является полезным начальным приближением в иерархической цепочке моделирования. Такая модель в осредненных по объему параметрах, позволяет значительно упростить математический аппарат, алгоритм решения задачи и уменьшить затраты машинного времени. Осреднение газодинамических параметров по объёму сводит исходную задачу к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями или системе алгебраических уравнений. Главным недостатком такого подхода является невозможность определения изменения параметров рабочего процесса по пространству.

Полная система уравнений нульмерной газодинамики имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = G_S^+ \delta_1(T, T_{\text{восн}}) + G_I^+ \delta_2 - G^- \delta_3(p, p_{\text{загл}}) \\ \frac{dE}{dt} = G_S^+ H_S \delta_1(T, T_{\text{восн}}) + G_I^+ H_I \delta_2 - G^- c_p T \delta_3(p, p_{\text{загл}}) \\ \frac{dm_m}{dt} = -G_S^+ \delta_1(T, T_{\text{восн}}) \\ \frac{dm_I}{dt} = -G_I^+ \delta_2 \\ \frac{dV}{dt} = Su_0 \left( \frac{p}{p_u} \right)^v \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $M$  — масса газа в камере;  $G^-$  — поток массы через критическое сечение;  $G_S^+ = \rho_m Su_0 \left( \frac{p}{p_u} \right)^v$  — газоприход от топлива;  $G_I^+$  — газоприход от воспламенителя;  $\delta_1$  — переключатель, включающий газоприход по поверхности горения твёрдого топлива при выполнении условия зажигания и выключающий при сгорании топлива;  $\delta_2$  — переключатель, управляющий работой воспламенителя и включающий воспламенитель в заданный момент времени и выключающий при сгорании топлива;  $\delta_3$  — переключатель, вскрывающий площадь критического сечения, моделируя разрыв сопловой заглушки;  $E$  — внутренняя энергия;  $H_S, H_I$  — теплотворные способности основного топлива и воспламенителя.

Для более точного описания процессов следует использовать модели с распределенными параметрами: одномерные нестационарные модели или модели повышенной размерности. При использовании одномерных подходов процессы описываются уравнениями, полученными осреднением параметров по поперечному сечению. Такие модели позволяют проводить более точные расчёты газодинамических характеристик нежели в нульмерной постановке. Единственность решения обеспечивается начальными и граничными условиями.

Система уравнений одномерной газодинамики с учетом изменяемой во времени и пространстве внутренней геометрии имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(SU) + \frac{\partial}{\partial x}(SF) = G, \quad (2)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения;  $U, F, G$  — вектора переменных и источникового члена:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{dS}{dx} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Нелинейность системы уравнений приводит к появлению возможных разрывных решений — ударных волн. Для построения методов численного решения разработаны схемы сквозного счета. Одним из возможных подходов, опускающих сквозной расчёт разрывных решений уравнений газодинамики, является метод конечного объёма с вычислением потоков на границах контрольных объёмов по методу распада произвольного разрыва — методу С. К. Годунова.

Связка двух моделей и однозначность решения обеспечивается граничными условиями (ГУ). Входными ГУ являются параметры, полученные при решении газодинамической задачи в камере сгорания в нульмерной постановке. Выходные ГУ — параметры среды, в которую истекают продукты сгорания. Соответственно, для сопряжения моделей разной размерности ГУ записываются в две фиктивные вычислительные ячейки.

В случае необходимости любая система уравнений может быть расширена путем введения дополнительных соотношений для моделирования новых физических процессов, так и упрощена, например, пренебрежением одной из пространственных координат или рассмотрением невязких течений [2].

### 3. Программная реализация подхода

Описанная выше математическая модель была воплощена в код самостоятельным программированием на языке Matlab. В целом программа позволяет рассмотреть особенности развития процесса запуска двигателя и спада давления при окончании его работы. Также можно исследовать влияние на запуск сопла:

- расхода, величины заряда и теплотворной способности воспламенителя;
- уровня температуры воспламенения основного заряда топлива;
- величины давления форсирования;
- энергетических и теплофизических характеристик топлива.

Для тестовых расчётов был взят теоретический двигатель на твёрдом топливе первой ступени. Принимались не конкретные размеры, а лишь их порядок [3]. На рис. 5 представлена схема исследуемого сопла.

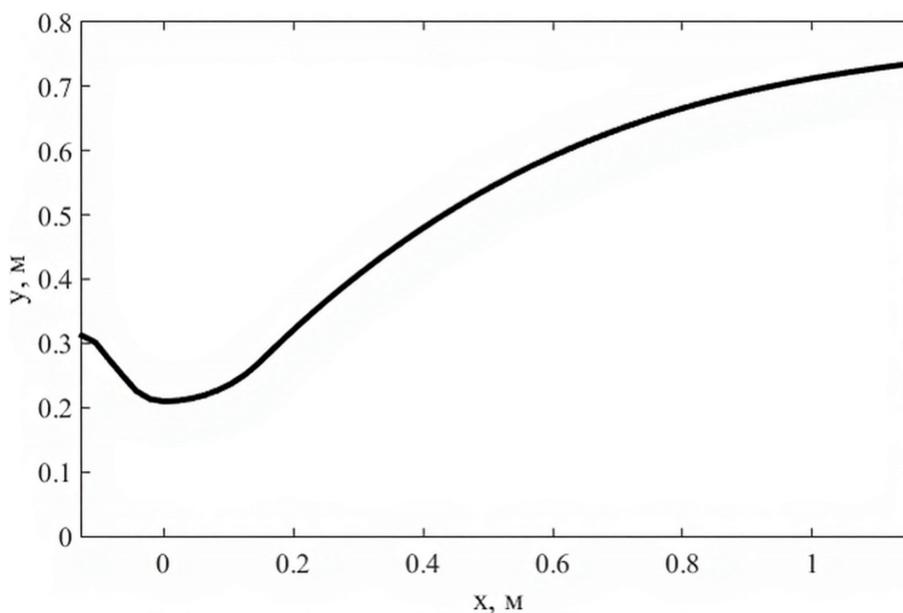


Рис. 5. Профиль сопла двигателя первой ступени

На рис. 6, 7 приведены изменения параметров в камере сгорания и на поверхности сопловой заглушки. Следует отметить, что прямая линия на начальном этапе работы установки от-

вечает задержке воспламенителя на 0.1 с. Расчёт же изменения давления на поверхности заглушки прекращается при достижении давления разрушения заглушки ( $p_{загл} = 20$  атм).

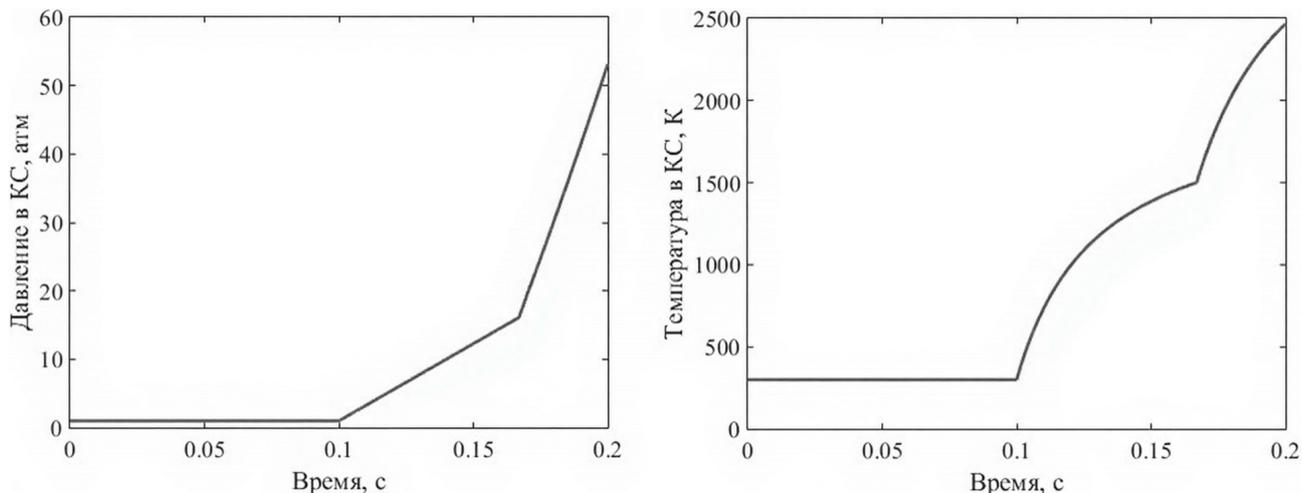


Рис. 6. Изменение давления и температуры в камере сгорания в начальный момент работы энергоустановки

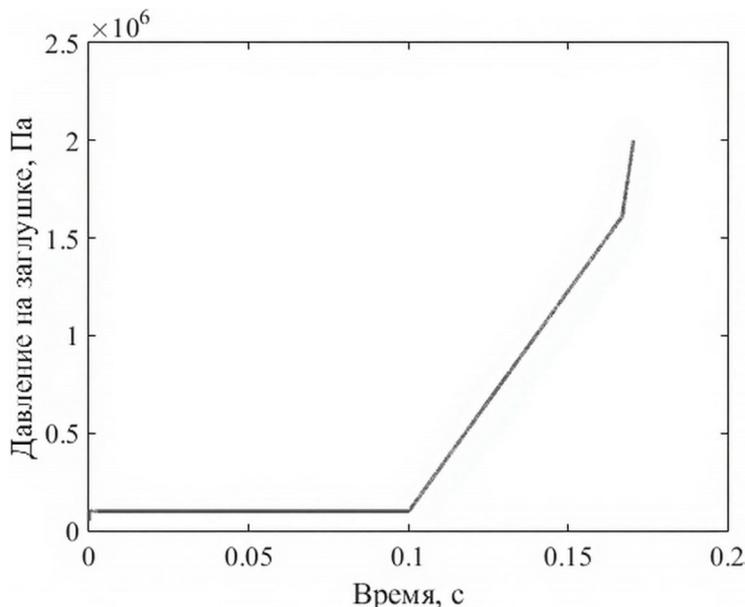


Рис. 7. Изменение давления на поверхности сопловой заглушки в начальный момент работы энергоустановки

На рис. 8 приведена газодинамическая картина заполнения соплового блока продуктами сгорания в первые мгновения после прорыва заглушки. Отчётливо видно распространение ударной волны. Штриховой линией отмечено положение заглушки.

Проведённые расчёты позволяют сделать вывод о том, что все предусмотренные в программе переключатели управления работают: отображается воспламенение заряда, моделируется прорыв заглушки. Полученная картина течения соответствует физике протекающих в начальный период работы двигателя процессов.

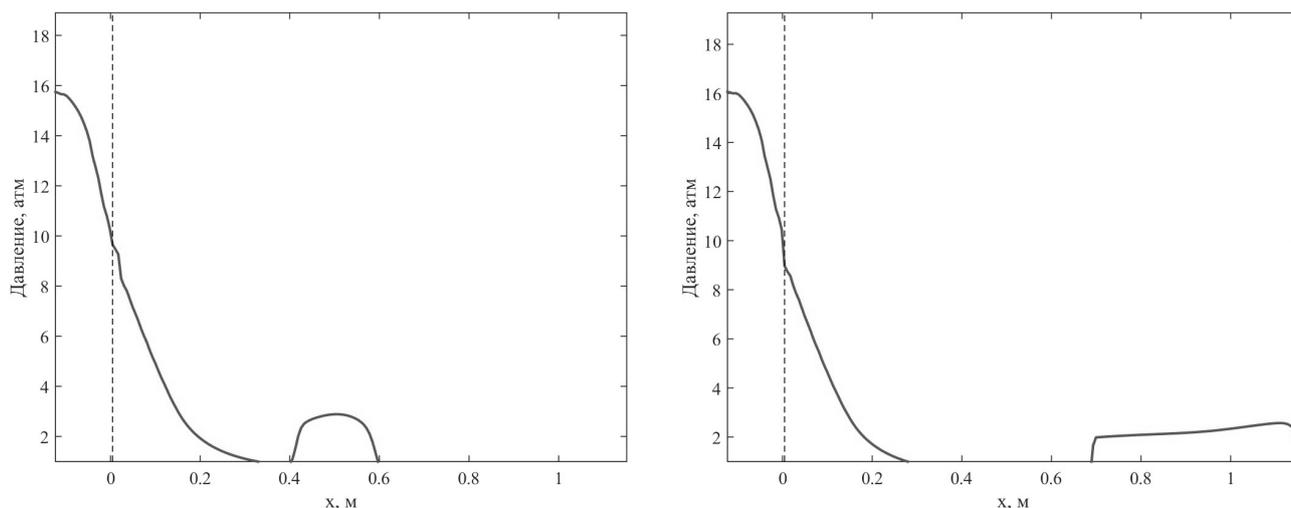


Рис. 8. Распространение ударной волны в сопловом блоке после разрушения заглушки

### Закключение

В работе рассмотрен подход, позволяющий моделировать нестационарные режимы работы энергоустановок с помощью моделей малой мерности. Такая постановка актуальна при проведении оперативных поисковых исследований. Разработаны программные средства, позволяющие моделировать сопловые течения в объектах разной геометрии.

### Литература

1. Брыков Н. А., Емельянов В. Н., Ефремов А. В. Разработка многоуровневой методологии моделирования внутренней газодинамики РДТТ // В сборнике: Фундаментальные основы баллистического проектирования. Сборник трудов VII Всероссийской научно-технической конференции. Сер. Библиотека ВОЕНМЕХ. Вестник БГТУ Под редакцией Б. Э. Кэрта. – Санкт-Петербург, 2022. – С. 40–46.
2. Березин С. Б., Каргапольцев И. С., Марковский Н. Д., Сахарных Н. А. Параллельная реализация метода расщепления для системы из нескольких гри с применением в задачах аэрогидродинамики // Информационные технологии. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2012. – № 5 (2). – С. 246–252.
3. Евтифьев М. Д. Комплексный технико-экономический анализ баллистических ракет подводных лодок (часть 2) // Вестник СибГАУ. – Красноярск, 2008. – № 1 (18). – С. 86–90.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ЖИДКОСТИ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ, ПРЕДПОЛАГАЮЩЕЕ ВОЗМОЖНОСТЬ УЧЕТА ЭФФЕКТА МПЕМБЫ

**В. Н. Колодежнов**

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж*

**Аннотация.** Начиная с античных времен, в ряде случаев на уровне наблюдений отмечается парадоксальное явление, которое заключается в следующем. При определенных условиях изначально более горячая вода замерзает несколько быстрее, чем изначально более холодная. Такой парадокс получил название эффекта Мпембы. В последнее время возник интерес к этой тематике, хотя окончательное обоснование или даже существование такого эффекта остается по-прежнему предметом для дискуссий. В работе рассмотрена достаточно простая модель охлаждения жидкости, которая демонстрирует проявление эффекта Мпембы. В качестве основного допущения выдвигается положение о том, что коэффициент теплоотдачи представляет собой функцию от начальной температуры жидкости. При этом предполагается, что более высоким значениям начальной температуры соответствует более высокое значение коэффициента теплоотдачи. Предложено качественное обоснование такому допущению. Для некоторых вариантов аппроксимации зависимости коэффициента теплоотдачи от начальной температуры приводятся результаты численных экспериментов по оценке влияния параметров системы на проявление эффекта Мпембы.

**Ключевые слова:** эффект Мпембы, коэффициент теплоотдачи, начальная температура, время охлаждения.

### Введение

Среди различных теплообменных процессов [1, 2] хорошо известен процесс охлаждения, при реализации которого, как очевидный факт, полагается, что изначально более горячая жидкость охлаждается до заданной конечной температуры за более длительное время, нежели такая же жидкость, но имеющая в начале процесса охлаждения более низкую температуру. Однако, уже достаточно давно на уровне наблюдений отмечалось контринтуитивное, парадоксальное явление, когда в некоторых случаях изначально более горячая вода замерзает быстрее по сравнению с изначально более холодной водой. Наблюдения такого рода, начиная с античных времен, неоднократно отмечались в работах Аристотеля, Р. Бэкона, Д. Марлиани, Ф. Бэкона, Р. Декарта, Дж. Блэка и других.

В некотором смысле повторное «переоткрытие» такого парадокса, как правило, связывают с работой [3], вскоре после публикации которой это явление получило название — эффект Мпембы.

Во многих более поздних исследованиях подтверждалось существование эффекта и, соответственно, предлагались различные варианты его обоснования, такие как фактор естественной конвекции в охлаждаемом сосуде [4], переохлаждение жидкости [5–8], более интенсивное испарение горячей воды по сравнению с холодной [9, 10], различное содержание растворенных газов в горячей и холодной воде [11], наличие растворенных примесей и присутствие твердых микрочастиц, как инициаторов начала кристаллообразования [12], влияние нагрева на водородные связи в молекулах воды [13, 14] и другие.

Следует обратить внимание на то, что во многих работах отмечалась не высокая экспериментальная воспроизводимость такого явления [15–18], что, возможно, было связано с не полным учетом отдельными исследователями влияния всей совокупности отмеченных выше факторов.

Вместе с тем, в целом ряде других публикаций, где проводилась, в том числе и экспериментальная проверка, существование эффекта Мпембы опровергалось [17–20]. Что же касается его «наблюдения», то это объяснялось несовершенством постановки эксперимента, наличием неучтенных побочных факторов, особенностями методики проведения измерений и т. п.

Однако в последнее время были получены новые результаты, в которых эффект Мпембы рассматривался в рамках неравновесной марковской динамики [21–23]. Аналогии проявления эффекта Мпембы были обнаружены как в термодинамических, так и целом ряде других систем: клатратные гидраты, магниторезистивные сплавы, гранулированные жидкости, квантовые системы [24–30]. В этих работах отмечалось, что рассматриваемые системы, находящиеся более удаленно от состояния равновесия, при определенных условиях возвращаются к нему за более короткое время, нежели такие же системы, но находящиеся изначально более близко к состоянию равновесия.

Были проведены прямые эксперименты по изучению проявления этого эффекта в коллоидной системе на примере наблюдения за изменением энергии отдельных частиц, совершающих тепловое хаотическое (броуновское) движение [31, 34, 35].

На основе анализа известных результатов с учетом заявляемых в них полярных точек зрения, можно видеть, что окончательно завершенная теория проявления эффекта Мпембы пока отсутствует, хотя работы в этом направлении продолжаются [23].

Как отмечалось выше, в публикациях последнего времени проявление эффекта Мпембы рассматривается, как стохастический процесс, описываемый на основе формализма марковской динамики. Вместе с тем представляет интерес провести моделирование этого явления в детерминированной постановке в рамках традиционного подхода к описанию тепловых процессов в сплошной среде.

В предлагаемой работе рассматривается достаточно простой пример модели теплообмена с окружающей средой, которая имитирует проявление эффекта Мпембы. В этой модели, формально, напрямую не учитывается ни один из приведенных выше известных факторов, привлекаемых для обоснования эффекта Мпембы. Вместе с тем предполагается, что по совокупности все отмеченные выше факторы, а также другие не известные на настоящий момент обстоятельства, интегрально проявляют себя в рассматриваемой модели через зависимость коэффициента теплоотдачи на свободной поверхности охлаждаемой жидкости от ее начальной температуры. Принимая во внимание такое допущение применительно к традиционной детерминированной модели теплопереноса показано, что при определенных значениях начальной температуры (для двух вариантов более холодной и более горячей жидкости) проявляет себя контринтуитивный результат, когда изначально более горячая жидкость может остывать до заданной температуры быстрее, нежели жидкость, которая была изначально более холодной.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим заполненный жидкостью сосуд с теплоизолированными стенками. Пусть на свободной поверхности жидкости происходит теплообмен с окружающей средой при заданном значении коэффициента теплоотдачи.

Предположим, что процесс теплообмена жидкости с окружающей средой допустимо описывать только ее средней температурой  $T$ , которая представляет собой неизвестную функцию времени  $t$ .

Такой упрощенный подход нередко используют в задачах нестационарного теплопереноса при сравнительно небольших значениях чисел Био [2]. В таких задачах, когда конвекцией жидкости внутри сосуда можно пренебрегать, процесс охлаждения неподвижной жидкости допустимо рассматривать подобным процессу охлаждения твердого тела.

С учетом сделанных допущений в безразмерной форме записи уравнение для определения температуры и начальное условие задачи принимают вид

$$\frac{dT'}{dt'} = -Bi(T'_0) \cdot (T' - T'_s); \quad (1)$$

$$t' = 0; \quad T' = T'_0; \quad (2)$$

$$T' = \frac{T - T_f}{T_b - T_f}; \quad Bi(T'_0) = \frac{\alpha(T_0) \cdot S^2}{\lambda \cdot V}; \quad Fo = t' = \frac{\lambda \cdot t}{c \cdot \rho \cdot S}; \quad T'_s < 0,$$

где  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  — удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности жидкости, соответственно;  $V$ ,  $S$  — объем и площадь свободной поверхности (площадь поверхности теплообмена) жидкости в сосуде, соответственно;  $\alpha(T_0)$  — коэффициент теплоотдачи на свободной поверхности жидкости, представляющий собой заданную функцию ее начальной температуры  $T_0$ ;  $T_f$  — минимально допустимая температура процесса (например, температура замерзания жидкости);  $T_b$  — максимально допустимая температура процесса (например, температура кипения);  $T'_s$  — принимаемая постоянной температура окружающей среды в окрестности свободной поверхности жидкости;  $Bi(T'_0)$ ,  $Fo$  — числа Био и Фурье, соответственно.

В последних соотношениях и далее безразмерные величины отмечены верхним штрихом.

Нетрадиционное допущение о зависимости коэффициента теплоотдачи  $\alpha(T_0)$  от начальной температуры может быть обосновано следующим образом.

Обычно, при моделировании теплообменных процессов предполагается, что коэффициент теплоотдачи не изменяется с течением времени. В дополнение к этому, предположим, что этот параметр зависит от начальной температуры процесса охлаждения. Это может быть обусловлено тем, что в реальной ситуации при охлаждении изначально более горячей жидкости, в принципе, на начальной стадии нестационарного процесса интенсифицируются конвективный теплообмен, испарение на свободной поверхности, влияние растворенных газов и другие, которые напрямую в модели не учитываются. Поэтому в реальности в каждый конкретный момент времени, особенно на начальной стадии охлаждения, эти обстоятельства могут вносить свой вклад в локальное (по времени) значение коэффициента теплоотдачи. В этой связи допущение о постоянстве коэффициента теплоотдачи в моделях предполагает следующую процедуру. Итоговое его значение должно быть получено, вообще говоря, усреднением локальных значений коэффициента теплоотдачи на всем временном интервале охлаждения, начиная от начального момента времени и заканчивая моментом достижения конечной температуры замерзания. Если же рассматривается процесс охлаждения жидкости с более низкой начальной температурой, то влияние отмеченных выше факторов может оказаться менее существенным. В итоге усредненный коэффициент теплоотдачи для охлаждения изначально более горячей жидкости может оказаться больше усредненного коэффициента теплоотдачи при охлаждении изначально более холодной жидкости.

Независимо от вида функции  $Bi(T'_0)$ , решение (1) с учетом (2) приводит в итоге к следующему простому выражению для зависимости времени  $Fo_f$  охлаждения жидкости до конечной температуры замерзания в зависимости от начальной температуры процесса

$$Fo_f = \frac{1}{Bi(T'_0)} \cdot \ln \left\{ 1 - \frac{T'_0}{T'_s} \right\}.$$

Заметим, что на модельном уровне допустимы самые различные варианты возможной аппроксимации, предположительно, монотонно возрастающей функции  $Bi(T'_0)$ .

## 2. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим достаточно простой случай, когда усредненный по времени охлаждения коэффициент теплоотдачи в диапазонах более низкой и более высокой начальных температур имеет различные, но постоянные значения.

Пусть, например, в диапазоне сравнительно низких начальных температур процесса  $T'_0 \in [0; T'_{01}]$  он равняется  $\alpha_1 = \text{const}$ , которому соответствует некоторое значение  $Bi_1$  для критерия подобия Био. В диапазоне же более высоких начальных температур  $T'_0 \in [T'_{02}; 1]$  этот параметр равняется  $\alpha_2 > \alpha_1$ , что соответствует значению  $Bi_2$ . Здесь  $T'_{01}$  и  $T'_{02} > T'_{01}$  представляют собой граничные значения того диапазона для начальных температур, на котором усредненный коэффициент теплоотдачи непрерывным образом изменяется от значения  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ .

Предположим, что на всем интервале изменения начальных температур зависимость  $Bi(T'_0)$  в первом приближении допустимо аппроксимировать непрерывно-дифференцируемой функцией вида

$$Bi(T'_0) = \begin{cases} Bi_1; & 0 < T'_0 < T'_{01}; \\ a_1 + b_1 \cdot T'_0 + c_1 \cdot T'^2_{01} + d_1 \cdot T'^3_{01}; & T'_{01} < T'_0 < T'_{0m}; \\ a_2 + b_2 \cdot T'_0 + c_2 \cdot T'^2_{02} + d_2 \cdot T'^3_{02}; & T'_{0m} < T'_0 < T'_{02}; \\ Bi_2; & T'_{02} < T'_0 < 1; \end{cases} \quad (3)$$

Здесь коэффициенты аппроксимирующих полиномов определяются из условий

$$\begin{aligned} Bi(T'_{01}) = Bi_1; \quad \left. \frac{dBi}{dT'_0} \right|_{T'_0 = T'_{01}} = 0; \quad Bi(T'_{02}) = Bi_2; \quad \left. \frac{dBi}{dT'_0} \right|_{T'_0 = T'_{02}} = 0; \\ Bi(T'_{0m}) = Bi_m; \quad \left. \frac{dBi}{dT'_0} \right|_{T'_0 = T'_{0m}} = k > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T'_{01} < T'_{0m} < T'_{02}$  и  $Bi_1 < Bi_m < Bi_2$  — некоторые промежуточные значения начальной температуры и числа Био, для значений которых смежные ветви аппроксимирующих полиномов «сшиваются» непрерывно-дифференцируемым образом;  $k$  — эмпирический параметр, характеризующий крутизну смежных ветвей аппроксимирующих полиномов, «сшиваемых» в промежуточной точке с координатами  $\{T'_{0m}; Bi_m\}$ .

Естественно, что последние два условия в (4) должны быть исполнены для каждого из двух аппроксимирующих полиномов.

С учетом функции  $Bi(T'_0)$ , вид графика которой приводится на рис. 1а, для тех же значений исходных параметров на рис. 1б представлена зависимость времени охлаждения жидкости от выбора начальной температуры процесса.

Главной особенностью полученной зависимости для времени охлаждения  $Fo_f$  от начальной температуры  $T'_0$  (рис. 1б) является то, что она, имея два экстремума, демонстрирует немонотонный характер.

Анализируя эту зависимость, нетрудно видеть, что в окрестности точек экстремума она допускает возможность демонстрации эффекта Мпембы, когда для более высокой начальной температуры  $T'_{0,hot}$  жидкости (из пары двух значений начальных температур  $T'_{0,cool} < T'_{0,hot}$ ) выполняется контринтуитивное условие так, что время ее охлаждения оказывается более коротким

$$Fo_f(T'_{0,cool}) > Fo_f(T'_{0,hot}).$$

Также из сравнения графиков функции  $Fo_f(T'_0)$ , построенных для различных значений  $T'_S$ , следует, что по мере снижения температуры окружающей среды перепад по времени охлаждения между точками экстремума сокращается и, соответственно, «сглаживается» проявление эффекта Мпембы.

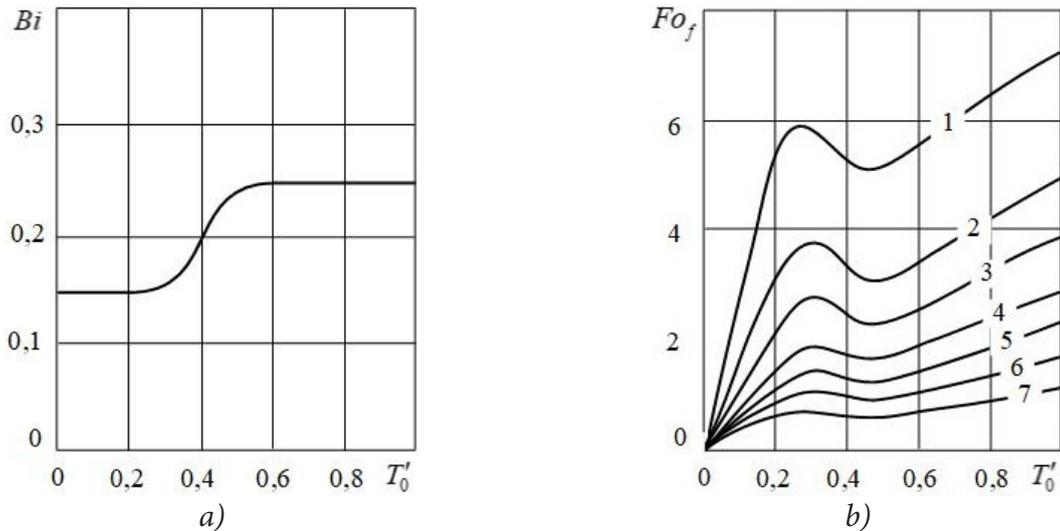


Рис.1. Зависимость критерия подобия Био (а) и времени охлаждения жидкости (b) от начальной температуры процесса для следующих значений исходных параметров  $Bi_1=0.15$ ;  $Bi_m=0.2$ ;  $Bi_2=0.25$ ;  $T'_{01}=0.2$ ;  $T'_{0m}=0.4$ ;  $T'_{02}=0.6$ ;  $k=0.7$ ; при  $T'_S = -0.2$  (1);  $-0.4$  (2);  $-0.6$  (3);  $-0.9$  (4);  $-1.3$  (5);  $-2.0$  (6);  $-3.5$  (7)

Сглаживанию демонстрации этого эффекта способствует также и снижение перепада между максимальным и минимальным значениями критерия подобия Био.

Для иллюстрации этого вывода в качестве аппроксимации зависимости  $Bi(T'_0)$  была принята другая возрастающая функция в виде кубической параболы, развернутой на угол  $90^\circ$

$$Bi(T'_0) = Bi_m + (Bi_1 - Bi_m) \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{T'_0}{T'_{0m}}}. \quad (5)$$

Здесь предполагается, что вершина параболы располагается в некоторой точке с координатами  $\{T'_{0m}, Bi_m\}$ . При этом  $Bi_1 = Bi(0)$  представляет собой задаваемое наименьшее значение критерия подобия Био на левой границе диапазона изменения начальной температуры.

С учетом аппроксимации в форме (5), график которой приводится на рис. 2а, в качестве примера на рис. 2b представлены графики зависимости  $Fo_f(T'_0)$ , построенные для различных значений перепада  $\Delta Bi$  между максимальным  $Bi_2 = Bi(1)$  и минимальным  $Bi_1$  значениями критерия подобия Био

$$\Delta Bi = Bi_2 - Bi_1.$$

Как следует из анализа представленных зависимостей, они качественно согласуются с аналогичными графиками, которые приводятся на рис 1b для другого вида (3) аппроксимирующей функции. Для этих зависимостей, также как и выше, главной особенностью является их не монотонность, порождающая проявление эффекта Мпембы. При этом можно видеть, что снижение значений  $\Delta Bi$  приводит к сглаживанию проявления этого парадокса.

### Заключение

Предложенный подход к описанию процесса охлаждения жидкости, является достаточно упрощенным и, вероятно, не может претендовать на окончательный вариант моделирования проявления эффекта Мпембы. Вместе с тем полученные результаты показывают, что в рамках традиционного детерминированного подхода к описанию теплопереноса в сплошной среде (в отличие от стохастического подхода на основе формализма марковской динамики применительно к отдельным частицам) при определенных допущениях появляется возможность демонстрации такого явления.

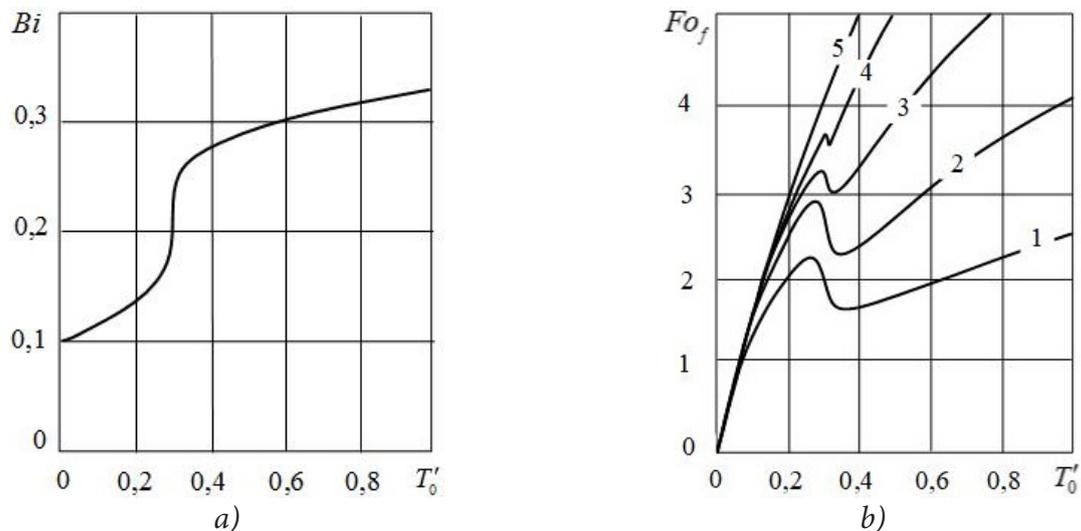


Рис. 2. Зависимость критерия подобия Био (а) и времени охлаждения жидкости (б) от начальной температуры процесса для следующих значений исходных параметров  $Bi_1 = 0.1$ ;  $T'_{om} = 0.3$ ;  $T'_s = -0.6$ ; при  $Bi_m = 0.22$  (1);  $0.16$  (2);  $0.13$  (3);  $0.11$  (4);  $0.10$  (5);  $\Delta Bi = 0.273$  (1);  $0.140$  (2);  $0.070$  (3);  $0.023$  (4);  $0$  (5)

В качестве основного допущения в рассмотренном подходе было сделано предположение о зависимости коэффициента теплоотдачи (который полагается предварительно усредненным на всем временном интервале реализации процесса охлаждения) от начальной температуры охлаждаемой жидкости. Проводя аппроксимацию такой зависимости, считали, что охлаждению изначально более горячей жидкости соответствует более высокое значение усредненного коэффициента теплоотдачи. При выдвигении такого допущения, предположительно, принимался во внимание вклад в итоговое значение усредненного коэффициента теплоотдачи, например, более интенсивного испарения жидкости при более высокой начальной температуре или, например, фактора конвекции жидкости в сосуде, которые напрямую в рассматриваемой модели не учитываются.

На основе проведенных численных экспериментов показано, что сглаживанию проявления эффекта Мпембы способствует снижение температуры окружающей среды, а также снижение перепада между максимальным и минимальным значениями критерия подобия Био.

### Литература

1. Лыков В. В. Теория теплопроводности. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Королев В. Н., Островская А. В. Теоретические основы теплотехники. Теплоперенос. Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2021. – 206 с.
3. Мремба Е. В., Osborne D. G. Cool? // Physics Education. – 1969. – Vol. 4, No 3. – P. 172–175.
4. Vynnycky M., Kimura S. Can natural convection alone explain the Mpemba effect? // International Journal of Heat and Mass transfer. – 2015. – Vol. 80. – P. 243–255.
5. Auerbach D. Supercooling and the Mpemba effect: When hot water freezes quicker than cold // American Journal of Physics. – 1995. – Vol. 63, No 10. – P. 882–885.
6. Monwhea Jeng. The Mpemba effect: When can hot water freeze faster than cold? // American Journal of Physics. – 2006. – Vol. 74, No 6. – P. 514–522.
7. Katz J. I. When hot water freezes before cold. // American Journal of Physics. – 2009. – Vol. 77, No 1. – P. 27–29.
8. Esposito S., De Risi R., Somma L. Mpemba effect and phase transitions in the adiabatic cooling of water before freezing. // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2008. – Vol. 387. – P. 757–763.

9. *Kell G. S.* The Freezing of Hot and Cold Water // *American Journal of Physics.* – 1969. – Vol. 37, No 5. – P. 564–565.
10. *Vynnycky M., Mitchell S. L.* Evaporative cooling and the Mpemba effect // *Heat and Mass Transfer.* – 2010. – Vol. 46. – P. 881–890.
11. *Wojciechowski B., Owczarek I., Bednarz G.* Freezing of aqueous solutions containing gases. // *Crystal Research Technology.* – 1988. – Vol. 23, No 7. – P. 843–848.
12. *Katz J. I.* Reply to Burrige & Linden: Hot water may freeze sooner than cold. // arXiv:1701.03219. 2017. URL: <https://archive.org/details/arxiv-1701.03219>. – 2017. – 4 p. (Дата обращения 25.08.2025).
13. *Jin J, Goddard W. A.* Mechanisms underlying the Mpemba effect in water from molecular dynamics simulations // *The Journal of Physical Chemistry C.* – 2015. – Vol. 119. – P. 2622–2629.
14. *Tyrovolas I. J.* Explanation for the Mpemba Effect // *Journal of Modern Physics.* – 2017. – Vol. 8, No 12. – P. 2013–2020.
15. *Freeman M.* Cooler still — An answer? // *Physics Education.* – 1979. – Vol. 14. – P. 417–421.
16. *Jeng M.* The Mpemba effect: When can hot water freeze faster than cold? // *American Journal of Physics.* – 2006. – Vol. 74, No 6. – P. 514–522.
17. *Burrige H. C., Linden P. F.* Questioning the Mpemba effect: hot water does not cool more quickly than cold // *Scientific Reports.* – 2016. – Vol. 6, No 1. – P. 37665-1–37665-11.
18. *Bier M.* The Rise and Fall of the Mpemba Effect .From: Volume 47, No. 4. July/August 2023. URL: <https://skepticalinquirer.org/2023/06/the-rise-and-fall-of-the-mpemba-effect/> (дата обращения 05.08.2025)
19. *Ahtee M.* Investigation into the freezing of liquids // *Physical Education.* – 1969. – Vol. 4. – P. 379–380.
20. *Brownridge J. D.* When does hot water freeze faster than cold water? A search for the Mpemba effect // *American Journal of Physics.* – 2011. – Vol. 79, No 1. – P. 78–84.
21. *Lu Z, Raz O.* Nonequilibrium thermodynamics of the Markovian Mpemba effect and its inverse // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA.* – 2017. – Vol. 114, No 20. – P. 5083–5088.
22. *Klich I., Raz O., Hirschberg O., Vucelja M.* Mpemba Index and Anomalous Relaxation // *Physical Review.* – 2019. – X 9. – P. 021060-1–201060-17.
23. *Teza G., Bechhoefer J., Lasanta A., Raz O., Vucelja M.* Speedups in nonequilibrium thermal relaxation: Mpemba and related effects. 2025. – 115 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/2502.01758> (Дата обращения: 26.08.2025)
24. *Chaddah P., Dash S., Kumar K., Banerjee A.* Overtaking while approaching equilibrium. arXiv:1011.3598. – 2010. – 3 p.
25. *Alex Greaney P., Lani G., Cicero G., Grossman J. C.* Mpemba-like behavior in carbon nanotube resonators // *Metallurgical and Materials Transactions A.* – 2011. – Vol. 42. – P. 3907–3912.
26. *Ahn Y-H, Kang H, Koh D-Y, Lee H.* Experimental verifications of Mpemba-like behaviors of clathrate hydrates // *Korean Journal of Chemical Engineering.* – 2016. – Vol. 33. – P. 1903–1907.
27. *Lasanta A., Vega Reyes F., Prados A., Santos A.* When the hotter cools more quickly: Mpemba effect in granular fluids // *Physical Review Letters.* – 2017. – Vol. 119. – P. 148001-1–148001-6.
28. *Nava A., Fabrizio M.* Lindblad dissipative dynamics in the presence of phase coexistence // *Physical Review B.* – 2019. – Vol. 100. – P. 125102-1–125102-7.
29. *Дехтярь В. А., Дубинов А. Е., Колесов Г. Н.* Наблюдение плазменного аналога эффекта Мпембы // *Химия высоких энергий.* – 2023. – Т. 57, № 4. – С. 255–259.
30. *Finkelstein A. V.* Analogue of the Mpemba effect in classical mechanics. 2025. 4 p. URL: [https://www.researchgate.net/publication/390321778\\_Analogue\\_of\\_the\\_Mpemba\\_effect\\_in\\_classical\\_mechanics](https://www.researchgate.net/publication/390321778_Analogue_of_the_Mpemba_effect_in_classical_mechanics) (Дата обращения 06.08.2025).
31. *Kumar A.* Inverse Mpemba Effect. – P. 105–114. In *Anomalous Relaxation in Colloidal Systems.* Part of the book series: Springer Theses. Recognizing Outstanding Ph. D. Research. : Springer, 2022. – 135 p.

32. *Kumar A., Chétrite R., Bechhoefer J.* Anomalous heating in a colloidal system // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* – 2022. – Vol. 119, No 5. – e2118484119. – P. 1–6.
33. *Sugimoto K., Kuwahara T., Saito K.* Prethermal inverse Mpemba effect. – 2025. – 9 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/2507.04669> (Дата обращения: 26.08.2025 )
34. *Kumar A., Bechhoefer J.* Exponentially faster cooling in a colloidal system // *Nature.* – 2020. – Vol. 584 (7819). – P. 64–68.
35. *Bechhoefer J., Kumar A., Chétrite R.* A fresh understanding of the Mpemba effect // *Nature Reviews Physics.* – 2021 August. – Vol. 3. – P. 534–535.

**ПРИМЕР МЕХАНИЧЕСКОГО АНАЛОГА ПРОЯВЛЕНИЯ ЭФФЕКТА МПЕМБЫ****В. Н. Колодежнов***Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж*

**Аннотация.** При определенных условиях наблюдается парадоксальное явление, которое заключается в том, что изначально более горячая вода замерзает несколько быстрее, чем изначально более холодная. Такой термодинамический феномен, окончательное обоснование или даже существование которого пока остается предметом для дискуссий, получил название эффекта Мпембы. В работе рассмотрен достаточно простой пример из динамики материальной точки, который можно интерпретировать в качестве механического аналога проявления эффекта Мпембы. Рассмотрена динамика материальной точки на наклонной плоскости, которая имеет два участка с различными значениями коэффициента трения. Показано, что в этом случае время спуска точки в зависимости от высоты ее начального положения на плоскости имеет немонотонный характер, что предполагает возможность демонстрации следующего результата. При определенном выборе значений высоты начального положения для двух разных материальных точек, время спуска той материальной точки, которая изначально находилась выше, может оказаться меньше, нежели время спуска для второй точки, которая начинала свое движение из более низкого положения.

**Ключевые слова:** эффект Мпембы, динамика материальной точки, коэффициент трения, потенциальная энергия.

**Введение**

Достаточно давно (практически с античных времен) получил известность иногда наблюдаемый термодинамический парадокс, который заключается в следующем. В некоторых случаях изначально более горячая вода замерзает быстрее по сравнению с изначально более холодной водой. В последние десятилетия, вскоре после публикации работы [1], это явление получило название эффект Мпембы.

История вопроса и подробный обзор современного состояния этой тематики приводится, например, в [2]. С одной стороны здесь представлен анализ работ [3–10], в которых подтверждается этот эффект, а также приводятся варианты возможного физического обоснования его проявления. С другой стороны обсуждаются исследования [11–14], в которых представлена полярно противоположная точка зрения, в соответствии с которой и со ссылкой на законы термодинамики эффект Мпембы отрицается.

Не смотря на такие радикально противоположные оценки, позже были опубликованы результаты, в которых эффект Мпембы рассматривался в рамках неравновесной марковской динамики [15, 16]. К этому следует добавить и результаты прямых экспериментальных исследований за проявлением этого эффекта в коллоидной системе при наблюдении за изменением энергии отдельных частиц, совершающих тепловое хаотическое броуновское движение [17–20].

Интересно также отметить, что в ряде публикаций [21–26] были описаны различные физические системы (клатратные гидраты, магниторезистивные сплавы, гранулированные жидкости, квантовые системы), в которых наблюдается явление, аналогичное эффекту Мпембы в следующем смысле. Находясь изначально более удаленно от состояния своего равновесия, эти системы при определенных условиях возвращаются к нему за более короткое время, по сравнению с такими же системами, но находящимися вначале более близко к состоянию равновесия.

К этим работам следует добавить и статью [27], в которой рассмотрен простой механический аналог проявления такого эффекта на примере классической задачи о движении материальной точки по двум смежным, идеально гладким плоскостям, которые имеют различный угол наклона к горизонту. При этом верхняя плоскость имеет больший угол наклона, чем нижняя. Материальная точка начинает движение из состояния покоя, находясь изначально на некоторой высоте над уровнем горизонта, на котором предполагается нулевое значение потенциальной энергии. Показано, что в такой постановке зависимость времени спуска материальной точки от высоты ее начального положения имеет не монотонный характер и демонстрирует, по сути, проявление эффекта Мпембы в классической механике.

В развитие результатов из статьи [27], в данной работе рассмотрен пример другой задачи из классической динамики материальной точки, который также можно интерпретировать в качестве механического аналога проявления эффекта Мпембы.

### 1. Постановка задачи

Пусть, как это показано на рис. 1, материальная точка  $M$  без начальной скорости спускается под действием силы тяжести  $P$  по наклонной шероховатой плоскости  $AC$  из положения  $O$ , с которым связано начало отсчета координатной оси  $S$ . Известно, что на верхнем участке  $AB$  наклонной плоскости коэффициент трения принимает значение  $f_{AB}$ , а на нижнем участке  $BC$  — другое значение  $f_{BC}$ . При этом предполагается, что

$$f_{AB} < f_{BC} < \operatorname{tg}\alpha,$$

где  $\alpha$  — угол наклона плоскости к горизонту.

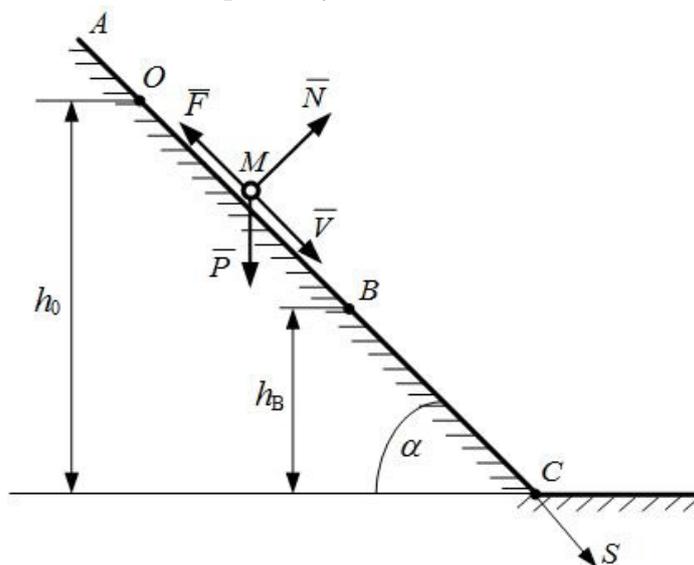


Рис. 1. Схема задачи

Перейдем к безразмерным значениям для времени  $t$ , скорости  $V$  и начальной высоты  $h_0$  расположения материальной точки  $M$  на плоскости с учетом следующих соотношений

$$t' = t \cdot \sqrt{\frac{g}{h_B}}; \quad V' = \frac{V}{\sqrt{g \cdot h_B}}; \quad h'_0 = \frac{h_0}{h_B},$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;  $h_B$  — высота расположения точки  $B$  на плоскости над уровнем горизонта, для которого принимается нулевое значение потенциальной энергии.

Здесь и далее безразмерные величины отмечены верхними штрихами.

Пусть  $0 \leq h'_0 \leq 1$ . Это означает, что начальное положение материальной точки  $M$  принадлежит нижнему участку  $BC$ . В процессе движения на материальную точку действуют силы: силы

тяжести  $P$ , нормальная составляющая реакции шероховатой поверхности  $N$  и сила трения  $F$ . Решая тогда задачу динамики материальной точки, находим выражение для времени движения материальной точки из начала координат в точке  $O$  в конечное положение  $C$

$$t'_1(h'_0) = \sqrt{\frac{2 \cdot h'_0}{\sin \alpha \cdot (\sin \alpha - f_{BC} \cdot \cos \alpha)}}; \quad 0 \leq h'_0 \leq 1. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $h'_0 \geq 1$ ; и начальное положение материальной точки принадлежит верхнему участку  $AB$ . В такой ситуации время движения из начала координат  $O$  в конечное нижнее положение  $C$  складывается из времени движения на части верхнего участка  $OB$  и времени движения на всем нижнем участке  $BC$ .

Повторно решая задачу динамики материальной точки, находим полное время ее движения до конечного положения  $C$  для этого случая

$$t'_2(h'_0) = \sqrt{\frac{2 \cdot (h'_0 - 1)}{\sin \alpha \cdot (\sin \alpha - f_{AB} \cdot \cos \alpha)}} + \frac{-V'_B + \sqrt{V'^2_B + 2 \cdot (1 - f_{BC} \cdot \operatorname{ctg} \alpha)}}{(\sin \alpha - f_{BC} \cdot \cos \alpha)}; \quad h'_0 \geq 1. \quad (2)$$

Здесь  $V'_B$  представляет собой скорость материальной точки в момент ее нахождения в положении  $B$  и определяется из выражения

$$V'_B = V'_B(h'_0) = \sqrt{2 \cdot (h'_0 - 1) \cdot (1 - f_{AB} \cdot \operatorname{ctg} \alpha)}.$$

Таким образом, время спуска материальной точки в конечное положение  $C$  в зависимости от произвольного значения высоты ее начального положения описывается функцией вида

$$t'_{OC} = t'_{OC}(h'_0) = \begin{cases} t'_1(h'_0); & 0 \leq h'_0 \leq 1; \\ t'_2(h'_0); & h'_0 \geq 1. \end{cases} \quad (3)$$

## 2. Обсуждение результатов

Типичный вид графика функции (3) с учетом (1), (2) схематично представлен на рис 2. Этот график состоит из двух ветвей  $CB$  и  $BA$ . Первая, монотонно возрастающая, ветвь  $CB$  соответствует случаю, когда начальное положение материальной точки располагается на нижнем участке плоскости, где коэффициент трения принимает значение  $f_{BC}$ . Эта ветвь описывается функцией (1). Вторая ветвь  $BA$  соответствует функции (2) и относится к ситуации, когда материальная точка начинает свое движение, изначально находясь на верхней части плоскости с коэффициентом трения  $f_{AB}$ . Основная особенность поведения функции (2) заключается в том, что ее график демонстрирует немонотонный характер. При этом в некоторой точке  $h'_0 = h'_{0,extr}$  эта функция имеет экстремум типа минимум.

Нетрудно видеть, что такой вид зависимости (3) предполагает возможность демонстрации следующего, на первый взгляд, контринтуитивного результата. При определенном выборе двух различных значений высоты начального положения

$$h'_{0,high} > h'_{0,low} \quad (4)$$

для двух разных материальных точек (которые, тем не менее, стартуют одновременно), время спуска той материальной точки, которая изначально находилась выше, чем начальное положение второй точки, может оказаться меньше, нежели время спуска для второй точки, которая начинала свое движение из более низкого положения

$$t'_{OC}(h'_{0,high}) < t'_{OC}(h'_{0,low}). \quad (5)$$

Этот результат можно интерпретировать, как проявление аналогии с термодинамическим эффектом Мпембы, только лишь на примере из классической механики. При этом, величина

$h'_0$ , по сути, характеризует значение потенциальной энергии материальной точки перед началом процесса спуска по плоскости.

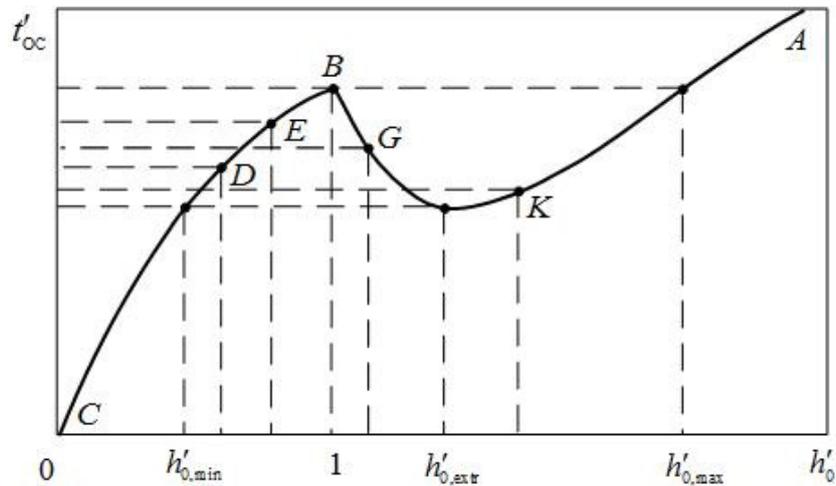


Рис. 2. Интерпретация проявления эффекта Мпембы в рассматриваемой задаче динамики материальной точки

Соответствующие значения для таких вариантов выбора высоты начального положения материальной точки, которые могут приводить к результату (4), (5), необходимо выбирать из диапазона

$$h'_{0,\min} < h'_{0,\text{low}} < h'_{0,\text{high}} < h'_{0,\max}. \quad (6)$$

Крайние граничные значения  $h'_{0,\min}$  и  $h'_{0,\max}$  этого диапазона должны определяться с учетом (1), (2) из решения следующих уравнений вида

$$t'_1(h'_{0,\min}) = t'_2(h'_{0,\text{extr}})$$

и

$$t'_1(1) = t'_2(h'_{0,\max}).$$

На рис. 2 в качестве некоторых примеров пар точек, для которых исполняются условия (4), (5), т. е. демонстрируется проявление этого эффекта, можно привести пары  $D$  и  $K$ ,  $B$  и  $G$ ,  $E$  и  $G$ ,  $E$  и  $K$ ,  $G$  и  $K$ . Вместе с тем, для других пар точек, хотя они и попадают в диапазон (6), такой эффект не наблюдается. Это относится, например, к парам точек  $D$  и  $E$ ,  $D$  и  $B$ ,  $D$  и  $G$ .

Влияние угла наклона плоскости на проявление эффекта Мпембы иллюстрируют зависимости, представленные на рис. 3. Как следует из представленных данных, возрастание угла наклона приводит к «сглаживанию» проявления обсуждаемого эффекта.

Точно такая же тенденция имеет место и при «сближении» значений коэффициентов трения на верхнем и нижнем участках наклонной плоскости.

### Заключение

Рассмотрен простой пример из классической динамики материальной точки, когда при определенных условиях одна система (в данном случае — материальная точка) находящаяся изначально достаточно далеко от состояния равновесия, в некоторых случаях возвращается в него быстрее, нежели другая, точно такая же система, но менее удаленная вначале от состояния равновесия. Такой результат предлагается интерпретировать, как проявление механического аналога эффекта Мпембы. «Ответственным» за такое поведение является немонотонный характер полученной зависимости времени спуска от значения начальной высоты расположения материальной точки при старте.

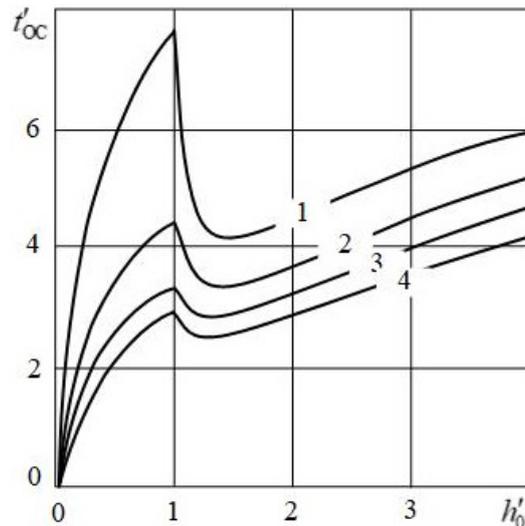


Рис. 3. Зависимость времени спуска материальной точки от высоты ее начального положения на плоскости при  $f_{AB}=0.05$ ;  $f_{BC}=0.5$ ; для  $\alpha = 30^\circ$  (1);  $35^\circ$  (2);  $40^\circ$  (3);  $45^\circ$  (4)

### Литература

1. Mpemba E. B., Osborne D. G. Cool? // *Physics Education*. – 1969. – Vol. 4, No 3. – P. 172–175.
2. Teza G., Bechhoefer J., Lasanta A., Raz O., Vucelja M. Speedups in nonequilibrium thermal relaxation: Mpemba and related effects. – 2025. – 115 p. – URL: <https://arxiv.org/pdf/2502.01758> (дата обращения: 26.08.2025)
3. Wojciechowski B., Owczarek I., Bednarz G. Freezing of aqueous solutions containing gases // *Crystal Research Technology*. – 1988. – Vol. 23, No 7. – P. 843–848.
4. Monwhea Jeng. The Mpemba effect: When can hot water freeze faster than cold? // *American Journal of Physics*. – 2006. – Vol. 74, No 6. – P. 514–522.
5. Katz J. I. When hot water freezes before cold // *American Journal of Physics*. – 2009. – Vol. 77, No 1. – P. 27–29.
6. Vynnycky M., Mitchell S. L. Evaporative cooling and the Mpemba effect // *Heat and Mass Transfer*. – 2010. – Vol. 46. – P. 881–890.
7. Vynnycky M., Kimura S. Can natural convection alone explain the Mpemba effect? // *International Journal of Heat and Mass transfer*. – 2015. – Vol. 80. – P. 243–255.
8. Jin J, Goddard W. A. Mechanisms underlying the Mpemba effect in water from molecular dynamics simulations // *The Journal of Physical Chemistry C*. – 2015. – Vol. 119. – P. 2622–2629.
9. Tyrovolas I. J. Explanation for the Mpemba Effect // *Journal of Modern Physics*. – 2017. – Vol. 8, No 12. – P. 2013 – 2020.
10. Katz J. I. Reply to Burrridge & Linden: Hot water may freeze sooner than cold. // arXiv:1701.03219. 2017. URL: <https://archive.org/details/arxiv-1701.03219>. 2017. 4 p. (дата обращения 25.08.2025).
11. Ahtee M. Investigation into the freezing of liquids // *Physical Education*. – 1969. – Vol. 4. – P. 379–380.
12. Burrridge J. D. When does hot water freeze faster than cold water? A search for the Mpemba effect // *American Journal of Physics*. – 2011. – Vol. 79, No 1. – P. 78–84.
13. Burrridge H. C., Linden P. F. Questioning the Mpemba effect: hot water does not cool more quickly than cold // *Scientific Reports*. – 2016. – Vol. 6, No 1. – P. 37665-1–37665-11.
14. Bier M. The Rise and Fall of the Mpemba Effect .From: Volume 47, No. 4. July/August 2023. URL: <https://skepticalinquirer.org/2023/06/the-rise-and-fall-of-the-mpemba-effect/> (дата обращения 05.08.2025)

15. Lu Z, Raz O. Nonequilibrium thermodynamics of the Markovian Mpemba effect and its inverse. // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. – 2017. – Vol. 114, No 20. – P. 5083–5088.
16. Klich I., Raz O., Hirschberg O., Vucelja M. Mpemba Index and Anomalous Relaxation. // Physical Review. – 2019. – X 9. – P. 021060-1–201060-17.
17. Kumar A., Bechhoefer J. Exponentially faster cooling in a colloidal system // Nature. – 2020. – Vol. 584 (7819). – P. 64–68.
18. Bechhoefer J., Kumar A., Chétrite R. A fresh understanding of the Mpemba effect // Nature Reviews Physics. – 2021 August. – Vol. 3. – P. 534–535.
19. Kumar A., Chétrite R., Bechhoefer J. Anomalous heating in a colloidal system // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2022. – Vol. 119, No 5. – e2118484119. – P. –6.
20. Kumar A. Inverse Mpemba Effect. In Anomalous Relaxation in Colloidal Systems. Part of the book series: Springer Theses. Recognizing Outstanding Ph. D. Research : Springer, 2022. – 135 p. P. 105–114.
21. Chaddah P., Dash S., Kumar K., Banerjee A. Overtaking while approaching equilibrium. arXiv:1011.3598, 2010. – 3 p.
22. Alex Greaney P., Lani G., Cicero G., Grossman J. C. Mpemba-like behavior in carbon nanotube resonators // Metallurgical and Materials Transactions A. – 2011. – Vol. 42. – P. 3907–3912.
23. Ahn Y-H, Kang H, Koh D-Y, Lee H. Experimental verifications of Mpemba-like behaviors of clathrate hydrates // Korean Journal of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 33. – P. 1903–1907.
24. Lasanta A., Vega Reyes F., Prados A., Santos A. When the hotter cools more quickly: Mpemba effect in granular fluids // Physical Review Letters. – 2017. – Vol. 119. – P. 148001-1–148001-6.
25. Nava A., Fabrizio M. Lindblad dissipative dynamics in the presence of phase coexistence // Physical Review B. – 2019. – Vol. 100. – P. 125102-1–125102-7.
26. Дехтярь В. А., Дубинов А. Е., Колесов Г. Н. Наблюдение плазменного аналога эффекта Мпембы // Химия высоких энергий. – 2023. – Т. 57, № 4. – С. 255–259.
27. Finkelstein A. V. Analogue of the Mpemba effect in classical mechanics. – 2025. – 4 p. URL: [https://www.researchgate.net/publication/390321778\\_Analogue\\_of\\_the\\_Mpemba\\_effect\\_in\\_classical\\_mechanics](https://www.researchgate.net/publication/390321778_Analogue_of_the_Mpemba_effect_in_classical_mechanics) (дата обращения 06.08.2025).

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ВРАЩЕНИЯ СФЕРЫ В НЕНЬЮТОНОВСКОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В. С. Купцов

*Воронежский государственный технический университет*

**Аннотация.** В работе построена математическая модель вращения сферы в неньютоновском потоке несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Поэтому конвективные члены скоростей течения не учитывались. Для решения этой задачи использовались система уравнений в частных производных (в напряжениях) и уравнение неразрывности данного течения. Рассматривалась модель неньютоновской жидкости с нелинейными компонентами поля напряжений (для дилатантной жидкости и псевдопластиков). Тензор напряжений вычислялся с помощью скоростей деформаций и второго инварианта скоростей деформаций, записанных в сферических координатах. С учетом нелинейности поля данного течения жидкости вычислены компоненты поля напряжений, а также момент, действующий на сферу. Получены аналитические формулы для гидродинамических параметров задачи. Рассмотрен частный случай решения задачи, и он совпал с классическим (для ньютоновского стационарного потока вязкой несжимаемой жидкости).

**Ключевые слова:** математическая модель, система уравнения в частных производных, сфера, цилиндрические и сферические координаты, стационарный поток, неньютоновская несжимаемая жидкость.

### Введение

Пусть сфера радиуса  $r = a$  вращается со скоростью  $\omega$  в потоке неньютоновской несжимаемой жидкости. Тогда данное течение удовлетворяет системе уравнений в напряжениях и уравнение неразрывности (в цилиндрических координатах) [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} + \frac{p_{rr} - p_{\varphi\varphi}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2\partial p_{r\varphi}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial p_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial p_{rz}}{r} &= 0. \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $r, z, \varphi$  — цилиндрические координаты ( $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$ ),  $p_{rr}, p_{\varphi\varphi}, p_{zz}, p_{r\varphi}, p_{rz}, p_{zr}$  — компоненты напряжений,  $v_r, v_z, v_\varphi$  — компоненты вектора скорости.

### 1. Математическая модель задачи вращения сферы в неньютоновском потоке несжимаемой жидкости

Будем рассматривать случай, когда сфера вращается вокруг оси  $Oz$  с постоянной скоростью  $\omega$  в безграничной неньютоновской несжимаемой жидкости. Условия прилипания жидкости на поверхности сферы в этом случае имеют вид (в сферических координатах):

При  $r = a$   $v_\varphi = \omega r = \omega a \sin \theta$ .

Предположим, что скорость обтекания сферы (как и в случае вязкой несжимаемой жидкости [1]) при условии  $r = \infty$   $v_\varphi = 0$  будет такой:

$$v_\varphi = \frac{\omega a^2}{r^2} \sin \theta. \quad (2)$$

Кроме того, предполагается, что траектории жидких частиц окружности с центрами на оси  $Oz$ , таковы

$$v_r \equiv 0, \quad v_z \equiv 0, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

При обтекании сферы вязкой несжимаемой жидкостью будет выполняться уравнение неразрывности [2]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости ( $\rho = \text{const}$ ).

Считаем, что скорость обтекания сферы такова:

$$v_\varphi = \frac{\omega a^3}{r^2} \sin \theta. \quad (3)$$

Уравнения для скоростей деформаций в общем случае в сферической системе координат будут таковы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right); \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right); \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}; \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \text{ctg} \theta}{r}; \end{aligned}$$

В нашем случае они примут вид:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0; \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( -\frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right); \quad \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \text{ctg} \theta}{r} \right); \quad (4)$$

В сферической системе координат второй инвариант скоростей деформации примет вид

$$\begin{aligned} J_2 &= (\varepsilon_{r\varphi})^2 + (\varepsilon_{\theta\varphi})^2 = \left( -\frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \text{ctg} \theta}{r} \right)^2 = \\ &= \left( -\frac{\omega a^3}{r^3} \sin \theta - \frac{2\omega a^3}{r^3} \sin \theta \right)^2 + \left( \frac{\omega a^3}{r^3} \cos \theta - \frac{\omega a^3}{r^3} \cos \theta \right)^2 = 9 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Обозначим  $T(r, \theta) = k J_2^{\frac{n-1}{2}}$ , где  $k$  — начальная вязкость,  $J_2$  — второй инвариант скоростей деформации. Для псевдопластиков  $n < 1$ , для дилатантных жидкостей  $n > 1$ , для вязкой жидкости  $n = 1$ . Тогда для неньютоновской жидкости имеем [3]:

$$\begin{aligned} p_{rr} = p_{\varphi\varphi} = p_{\theta\theta} &= -p, \quad p_{r\theta} = p_{\theta\varphi} = 0; \\ p_{r\varphi} &= T \varepsilon_{r\varphi} = T \left( -\frac{3\omega a^3}{r^3} \sin \theta \right). \end{aligned}$$

Эти соотношения подставляются в систему уравнений (1), для которой  $p = \text{const}$ .

Отметим, что при  $n = 1$  и  $k = \mu$  получим формулы, соответствующие решению задачи обтекания сферы вязкой несжимаемой жидкостью.

Вычислим результирующий момент сил сопротивления вращению сферы. Касательная составляющая напряжения трения на поверхности сферы

$$p_{r\varphi} = T \left( -\frac{3\omega a^3}{r^3} \sin \theta \right).$$

Взяв на поверхности сферы элемент площади  $a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  умноженный на  $p_{r\varphi}$  при  $r = a$  и на плечо  $a \sin \theta$ , проинтегрируем это произведение по поверхности сферы при  $\theta = [0; \pi]$  и  $\varphi = [0; 2\pi]$  получим [4]:

$$L_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ T \left( -\frac{3\omega a^2}{r^2} \sin \theta \right) \right]_{r=a} a^3 \sin^2 \theta d\theta d\varphi = -6k\omega^n \pi a^3 \int_0^\pi \sin^{n+2} \theta d\theta.$$

Напомним, что для псевдопластиков  $n < 1$ , для дилатантных жидкостей  $n > 1$ , а для вязкой жидкости  $n = 1$ . Для вязкой несжимаемой жидкости ( $k = \mu$ ) получим следующее выражение для момента

$$L_z = -6\omega\mu\pi a^3 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -8\pi\mu\omega a^3.$$

### Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов / Л. Г. Лойцянский. – 7-е изд., испр. – Москва : Дрофа, 2003. – 840 с.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. – Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 519 с.
3. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости / У. Л. Уилкинсон. – Москва : Мир, 1964. – 216 с.
4. Купцов В. С. Математическая модель задачи обтекания сферы неньютоновским потоком несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса / В. С. Купцов, А. А. Катрахова // Вестник ВГТУ. – 2023. – Т. 19, № 6. – С. 81–84.

## РАЗРАБОТКА АНАЛИТИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ РАСЧЁТА КОНСТАНТ ФАЗОВОГО РАВНОВЕСИЯ (K-ФАКТОРОВ) В PVT-МОДЕЛИРОВАНИИ НЕФТЕГАЗОКОНДЕНСАТНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

К. В. Литвинова

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**Аннотация.** В исследовании проводится анализ современных подходов к расчету констант фазового равновесия (K-values). Основное внимание уделено разработке аналитических методов, направленных на снижение вычислительной нагрузки при моделировании PVT-поведения нефтегазоконденсатных смесей. Ключевым преимуществом предлагаемых параметризованных зависимостей является значительное ускорение расчетов фазовых диаграмм. Результаты сравнительного тестирования демонстрируют преимущества новых методов перед традиционными численными решениями.

**Ключевые слова:** константы фазового равновесия, PVT-моделирование, нефтегазоконденсатные месторождения, аналитические методы, уравнения состояния, термодинамическое моделирование.

### Введение

Современное моделирование пластовых флюидов предъявляет высокие требования к точности прогнозирования фазового поведения многокомпонентных систем. Ключевую роль в построении достоверных PVT-моделей играет расчет констант фазового равновесия (K-values) [5].

Несмотря на высокую точность, традиционные численные методы, основанные на решении уравнений состояния, отличаются значительной вычислительной стоимостью. В качестве альтернативы рассматриваются аналитические подходы, включая формулу Вильсона и ее модификации (например, Тора-Вильсона). В данной работе также представлен метод построения констант фазового равновесия с использованием настраиваемых параметров, что позволяет аппроксимировать поведение реальных растворов в заданных диапазонах давлений и температур.

Особую сложность представляет учет многофакторных влияний, таких как межмолекулярные взаимодействия в растворе, свойства пористой среды и история разработки месторождения [3]. Для их описания применяются современные модели, включающие регулируемые параметры (газметры) и учитывающие свойства реальных растворов, что, в свою очередь, зачастую требует больших вычислительных мощностей.

Результаты исследований демонстрируют, что применение аналитических аппроксимаций для констант фазового равновесия позволяет не только ускорить вычисления, но и повысить устойчивость численных алгоритмов при построении фазовых диаграмм [2, 6].

### 1. Постановка задачи

Основной целью исследования является разработка эффективных аналитических методов расчета констант фазового равновесия (K-values) для многокомпонентных углеводородных систем, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Вычислительная эффективность: Существенное сокращение времени и ресурсов по сравнению с численными методами на основе уравнений состояния.

Традиционно K-values определяются через сложные уравнения состояния:

$$K_i = \frac{y_i}{x_i} = f(p, T, \vec{z}),$$

где  $y_i$  и  $x_i$  — мольные доли  $i$ -го компонента в газовой и жидкой фазах соответственно,  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $\vec{z}$  — вектор состава смеси.

2. Физическая адекватность: Учет ключевых факторов, таких как состав смеси, давление, температура и влияние пористой среды, для обеспечения достоверности в широком диапазоне условий.

3. Устойчивость и надежность: Повышение стабильности и сходимости алгоритмов при построении фазовых диаграмм в рамках композиционного моделирования. Обеспечение устойчивости расчетов в широком диапазоне давлений (от 0,1 до 100 МПа) и температур (от 273 до 473 К).

4. Адаптивность: Возможность калибровки (настройки параметров) метода под конкретные характеристики пластового флюида для повышения точности прогноза.

5. Термодинамическая согласованность:

$$K_i(p, T, \vec{z}) = \frac{y_i}{x_i} = \frac{\phi_i^L(p, T, \vec{x})}{\phi_i^V(p, T, \vec{y})},$$

где  $\phi_i$  — коэффициенты фугитивности.

6. Простота интеграции разработанных методов в существующие гидродинамические симуляторы через стандартные интерфейсы данных.

7. Граничные условия:

– При  $p \rightarrow 0$ :  $K_i \rightarrow \frac{p_i^{sat}(T)}{p}$ ;

– В критической точке:  $K_i \rightarrow 1$ ;

– Для неполярных компонентов:  $\frac{dK_i}{dp} \approx 0$ .

8. Учет межмолекулярных взаимодействий:

$$\ln K_i = \ln K_i^{ideal} + \ln \Gamma_i^L - \ln \Gamma_i^V + \frac{(v_i^L - v_i^V) \cdot (p - p_i^{sat})}{R \cdot T},$$

где  $\Gamma_i^L$  — коэффициент активности в жидкой фазе,  $\Gamma_i^V$  — коэффициент активности в паровой фазе,  $p_i^{sat}$  — давление насыщенных паров чистого компонента,  $v_i^L$  — парциальный мольный объем в жидкости,  $v_i^V$  — парциальный мольный объем в паре.

Разрабатываемые методы должны обеспечить новый уровень эффективности PVT-моделирования при сохранении физической обоснованности и требуемой точности расчетов.

## 2. Методы решения

Для расчета констант фазового равновесия (K-values) предложен комплексный подход, включающий три метода с различной степенью детализации и точности:

1. **Упрощенная модель для предельно разбавленных растворов.** Используется для быстрой оценки и в условиях, где применимы законы Генри и Рауля.

2. **Параметрическая модель с настраиваемыми коэффициентами.** Позволяет аппроксимировать поведение реальных растворов в заданном диапазоне давлений и температур путем калибровки коэффициентов.

3. **Термодинамически согласованная модель.** Основана на фундаментальном условии фазового равновесия — равенстве химических потенциалов (или фугитивностей) каждого компонента в газовой и жидкой фазах, что обеспечивает наибольшую точность.

Условие фазового равновесия выражается через равенство химических потенциалов компонентов в газовой и жидкой фазах. Для бинарной системы метан-декан получены аналитические выражения, описывающие кривые кипения и конденсации. Согласно законам Рауля и

Дальтона для слабых растворов при давлениях, близких к давлению насыщенного газа чистого  $i$ -го компонента  $p_{si}$ , можно пользоваться следующим приближением:

$$K_i = \frac{p_{si}(T)}{p}.$$

В данной работе представлен метод построения констант фазового равновесия с использованием настраиваемых параметров, которые учитывают особенности поведения реальных растворов в определённом диапазоне давлений и температур [1, 2]:

$$K_i(p) = \frac{A_i \cdot (p + p_*)^\alpha}{p^\beta}, \quad (1)$$

где  $A_i$ ,  $p_*$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — настраиваемые газаметры, учитывающие свойства реального флюида.

Молярный потенциал Гиббса для газа имеет вид:

$$g_G = \beta RT \ln p + RT \sum_i y_i \ln y_i + \sum_i y_i \chi_i(T),$$

где  $T$  — температура,  $p$  — давление,  $y_i$  — молярная концентрация  $i$ -го компонента в газовой фазе,  $\chi_i(T)$  — функции, характеризующие чистый  $i$ -й компонент и зависящие только от температуры,  $\beta$  — функции, учитывающие неидеальность растворения  $i$ -го компонента в реальном растворе.

Опуская некоторые математические выкладки, химический потенциал компонентов в газовой фазе имеет вид:

$$\mu_{i,G} = RT \ln(p^\beta y_i) + \chi_i(T).$$

Аналогично для жидкой фазы

$$\mu_{i,L} = RT \ln((p + p_*)^\alpha A_i x_i) + \chi_i(T).$$

Одним из условий локального фазового равновесия является равенство химических потенциалов компонентов в фазах. Поэтому получим выражение:

$$A_i x_i (p + p_*)^\alpha = p^\beta y_i.$$

Тогда константы фазового равновесия  $K_i$  имеют вид [1,2]:

$$K_i = \frac{y_i}{x_i} = \frac{A_i (p + p_*)^\alpha}{p^\beta}. \quad (2)$$

Рассмотрим 2-х компонентный раствор метан-декан  $CH_4 - C_{10}H_{22}$ . Используя условия нормировки, получим:

$$A_1 = \frac{y_1}{x_1} \frac{p}{(p + p_*)^\alpha}; \quad A_2 = \frac{1 - y_1}{1 - x_1} \frac{p}{(p + p_*)^\alpha}.$$

Введем новые обозначения:  $C_L(p) = x_1$ ,  $C_G(p) = y_1$  (кривые кипения и конденсации).

В итоге получим:

$$C_L(p) = \frac{p}{(p + p_*)^\alpha} \frac{1}{A_1 - A_2} + \frac{A_2}{A_2 - A_1};$$

$$C_G(p) = \frac{A_1}{A_2 - A_1} + \frac{(p + p_*)^\alpha}{p} \frac{A_1 A_2}{A_2 - A_1}.$$

Если после измерений на скважине известны уравнения состояния жидкой и газовой фазы, то по ним вычисляются все параметры  $A_i$ ,  $p_*$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Если же при некотором давлении  $p_0$  известны концентрации в газовой  $\{y_{i0}\}$  и жидкой  $\{x_{i0}\}$  фазах, то модель полностью определена и построена. Если таких данных нет или недостаточно, то используется flash из композиционной модели [1, 2, 4, 7].

### 3. Результаты и анализ

Проведенные расчеты для различных термодинамических условий и составов углеводородных смесей показали следующее:

#### 1. Точность аппроксимации:

– Для бинарной системы метан-декан погрешность расчета констант фазового равновесия не превышает 5 % относительно эталонных данных. В рабочем диапазоне давлений 30–100 бар отклонения составляют не более 3,2 %.

– Наибольшие расхождения (до 5 %) наблюдаются вблизи критической точки системы, что ожидаемо для аналитических методов.

– Сравнение с композиционной моделью подтвердило хорошее соответствие результатов: максимальное отклонение в указанном диапазоне не превышает 4,7 % при полном совпадении тенденций изменения K-values.

#### 2. Вычислительная эффективность:

– Предложенные методы позволяют сократить время расчетов в 2–3 раза по сравнению с традиционными подходами.

– Количество итераций, необходимое для достижения сходимости, уменьшено на 40–45 %, что свидетельствует о заметном снижении требований к вычислительным ресурсам.

#### 3. Устойчивость алгоритмов:

– В сложных термодинамических условиях, включая области с ретроградными явлениями, разработанные алгоритмы демонстрируют устойчивую и стабильную работу.

### Заключение

Проведенное исследование демонстрирует высокий практический потенциал разработанных аналитических методов для моделирования нефтегазовых месторождений. Ключевым достижением является существенное сокращение временных затрат при проведении многовариантных расчетов без потери инженерной точности.

Предложенный подход особенно актуален для оперативного анализа и прогнозирования разработки сложных нефтегазоконденсатных залежей, где критически важны учет ретроградных явлений и рисков гидратообразования.

Таким образом, работа открывает новые возможности для создания эффективных инструментов поддержки принятия технологических решений на этапах проектирования и оптимизации разработки углеводородных месторождений.

### Литература

1. Брусиловский А. И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. – «Грааль», 2002.

2. Колдоба Е. В. Метод построения термических констант фазового равновесия многокомпонентных растворов / Математическое моделирование. – 2018. – Т. 30, № 4. – С. 84–96.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Том 6. – М. : Наука, 1986. – 736 с.

4. Литвинова К. В. Об одном решении многокомпонентной фильтрации с фазовыми переходами при моделировании разработки нефте- и газосодержащих пластов, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2024», секция «Разработка месторождений нефти и газа», МАКС Пресс, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2024.

5. Токарев Д. К., Фатеев Д. Г. Экспресс-анализ модели пластового углеводородного флюида, используемого в гидродинамической модели пласта. – №1(46). – С. 196–208.

6. Ющенко Т. С. Математическое моделирование парожидкостного равновесия в многокомпонентных углеводородных системах: диссертация ... кандидата физико-математических наук: Ющенко Тарас Сергеевич; [Место защиты: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)];. – Москва, 2016.

7. Ющенко Т. С., Брусиловский А. И. Поэтапный подход к созданию и адаптации PVT-моделей пластовых углеводородных систем на основе уравнения состояния. – Т. 24, № 3. – С. 164–18.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАБУХАНИЯ РЕЗИНОВОЙ КРОШКИ В БИТУМНОМ ВЯЖУЩЕМ

О. В. Матвиенко<sup>1,2</sup>, Н. С. Фирсанова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Томский государственный архитектурно-строительный университет

<sup>2</sup>Томский государственный университет

**Аннотация.** Проведено исследование процесса набухания резиновой крошки в битумном вяжущем в процессе приготовления резинобитумного концентрата. Установлено, что температура является решающим фактором, влияющим на процесс набухания резиновой крошки. Увеличение температуры приводит к уменьшению времени равновесного набухания. При одних и тех же условиях мелкие частицы резины набухают быстрее и достигают равновесного набухания раньше, чем крупные частицы.

**Ключевые слова:** резинобитумное вяжущее, дорожный битум, набухание, моделирование.

### Введение

Модификаторы на основе шинной резины уже более 50 лет успешно используются в дорожной отрасли различных стран мира. Асфальтобетоны, изготовленные с применением таких модификаторов, отличаются повышенной сдвигоустойчивостью, устойчивостью к низкотемпературным трещинам, повышенной усталостной долговечностью, более низкой стоимостью содержания. Применение резинобитумных вяжущих существенно расширяет температурный интервал надежной работы асфальтобетонного покрытия, увеличивает трещиностойкость при низких температурах за счет повышенной эластичности, повышает стойкость покрытия к колееобразованию не только по сравнению с традиционным рецептом ЩМА с применением целлюлозной стабилизирующей добавки, но и по сравнению с ЩМА на полимерно-битумном вяжущем.

В последнее время значительное внимание исследователей направлено на модификацию нефтяных битумов применением резиновой крошки или резинового порошка. Этому перспективному направлению посвящено значительное количество исследований [1–6].

Анализ многочисленных исследований, посвященных проблеме модификация битумов с использованием резиновой крошки, показывает, что направление модифицирования битумных вяжущих в РФ по сравнению с другими странами имеет большие перспективы [7].

Исследования с применением резиновой крошки при производстве битумных вяжущих проводились еще в середине XX [8] века и несколько активизировались в 1990–2000-е годы [9].

В работе [10], подробно описаны свойства асфальтобетона при введении в его состав резины в зависимости от объемов и фракций ее введения.

В работе [11] были проведены исследования свойств асфальтобетонов при внесении в их состав модифицированных твердых полимерных материалов. Получены положительные результаты в изменении структуры асфальтобетона.

Модификация дорожного асфальтобетона резиновыми порошками рассмотрена в [12]. Одним из способов улучшения свойств асфальтобетоном является введение механоактивированной резиновой крошки.

В работе [13] проведено исследование эффективности измельчения резиновых отходов в модельном измельчителе, разработаны рекомендации по изготовлению опытно-производственной установки для получения резиновой крошки требуемой дисперсности.

Настоящая работа является продолжением исследований течения, теплообмена и модификации битумных вяжущих различной реологии [14–28]. Целью работы является исследование

процесса набухания резиновой крошки в битумном вяжущем в процессе приготовления резинобитумного концентрата.

Схема получения гомогенного резинобитумного вяжущего предусматривает на первом этапе механическое перемешивание резиновой крошки в количестве 37.5 % масс. в среде битума БНД 70/100 в количестве 50 % масс. и пластификаторов в количестве 12.5 % масс. в лопастной мешалке с получением концентрированной суспензии резинобитумного композита. Затем смесь при постоянном перемешивании выдерживается при температуре 230 °С в течении 2.5 часов с получением концентрированной суспензии резинобитумного композита. Затем температура суспензии понижается до комнатной температуры. На втором этапе производится смешение в инжекторной установке непрерывного действия концентрированной суспензии резинобитумного композита в количестве от 50 % масс. с битумом в количестве 50 % масс.

Из-за термодинамической совместимости между каучуком и низкомолекулярными фракциями битума [29], мальтены диффундируют в резиновые сети и поглощаются ими. Это вызывает набухание частиц каучука и образование гелеобразной структуры, прилегающей к границе раздела битум-каучук, а также ослабление межмолекулярных связей в резине. Набухание частиц резиновой крошки продолжается с увеличением времени взаимодействия. В определенный момент набухание резины достигает своего равновесия с увеличением объема в несколько раз. После этого увеличение времени взаимодействия при повышенных температурах приведет к распаду резины. Частицы резиновой крошки разделяются на более мелкие индивидуумы из-за распада резиновой сети. Когда температура взаимодействия достаточно высока, этот процесс включает две химические реакции: деполимеризацию и девулканизацию [30], которые разрушают связи полимерной цепи или поперечные связи, снижая, таким образом, среднюю молекулярную массу резины.

Образовавшееся каучуковое вещество структурирует битум. Это придает резинобитумному вяжущему эластичность, более высокую температуру размягчения, пластичность при низких температурах, понижает температуру хрупкости и повышает глубину пенетрации.

### Математическая модель

Для описания кинетики набухания используем гетерофазную модель, выделяющую в набухшей резиновой крошке две фазы: фазу полимерного раствора (ПР) и фазу внешнего раствора (ВР) [31].

Изменение объема резиновой крошки описывается уравнением

$$\frac{dV}{dt} = k_1 S \ln \left( \frac{a_w(c_b)}{a_w(\bar{c})} \right) + k_2 (V_f^{eq} - V_f). \quad (1)$$

где  $V$ , м<sup>3</sup> — объём резиновой крошки в текущий момент времени  $t$ , с;  $V_f^{eq}$ , м<sup>3</sup> — объём фазы внешнего раствора при равновесии;  $V_f$ , м<sup>3</sup> — текущий объём фазы внешнего раствора;  $a_w(c_b)$  — активность легких фракций битума в приповерхностном слое с концентрацией  $c_b$ , моль/л;  $a_w(\bar{c})$  — активность легких фракций битума в фазе внешнего раствора при концентрации растворенного вещества в ней —  $\bar{c}$  в текущий момент времени;  $k_1$ , м/с — коэффициент, характеризующий скорость потока из резиновой крошки или в резиновую крошку под действием градиента химических потенциалов;  $k_2$ , с<sup>-1</sup> — коэффициент, отражающий время релаксации полимерной сетки к приходу её в равновесное состояние;  $S$ , м<sup>2</sup> — площадь поверхности грани в текущий момент времени.

Параметры, используемые при моделировании, были определены и собраны из опубликованных литературных источников. Для моделирования набухания резиновой крошки в битумном вяжущем рассматривался битум марки БНД 70/100, резина легковых шин при четырех различных температурах, 150, 180, 200 и 230 °С.

## Анализ результатов

Изменение объема резиновых частиц в процессе набухания характеризует коэффициент набухания, который равен отношению изменения объема частицы в процессе набухания к исходному объему резиновой частицы:

$$K = \frac{V - V_0}{V_0}. \quad (2)$$

Из рис. 1 видно, что увеличение объема резиновой крошки наиболее быстро происходит на ранней стадии взаимодействия. С течением времени скорость увеличения объема крошки замедляется практически до нуля. Это свидетельствует о достижении равновесного размера резиновой крошки.

С ростом температуры процесс набухания частиц резины в битуме происходит быстрее. Чем выше температура, тем меньше времени требуется частицам резины для достижения равновесия. Это происходит из-за увеличения коэффициентов диффузии при повышенных температурах, что обусловлено большим сегментарным движением полимерных цепей. В целом, равновесная степень набухания резины при разных температурах одинакова.

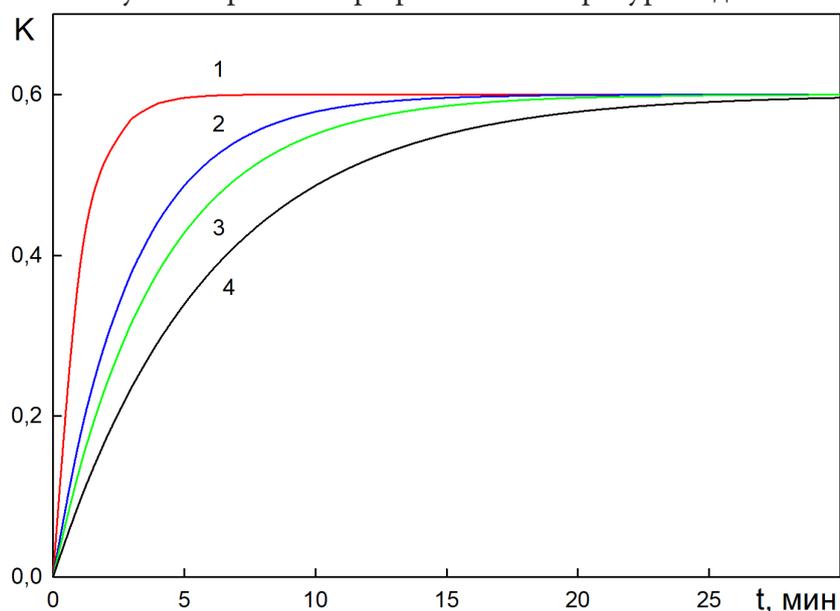


Рис. 1. Изменение коэффициента набухания резиновой крошки с течением времени при различных температурах. Начальный диаметр крошки равен 0,3 мм: 1 —  $T = 230$  °C, 2 —  $T = 200$  °C, 3 —  $T = 180$  °C, 4 —  $T = 150$  °C

На процесс набухания значительно влияет начальный размер частиц резиновой крошки. Мелкие частицы резины набухают быстрее и достигают равновесного набухания на более ранней стадии, чем крупные частицы, как показано на рис. 2. Время насыщения мальтенами мелких частиц резины (диаметром менее 0,3 мм) составляет примерно через 5 минут, однако процесс насыщения мальтенами средних частиц (диаметром от 0,3 до 0,6 мм) увеличивается до 10 минут, а крупных частиц (диаметром более 1,2 мм) составляет более 30 минут.

На основании результатов численного моделирования можно сделать следующие выводы:

- Температура является решающим фактором, влияющим на процесс набухания резиновой крошки. Увеличение температуры приводит к росту коэффициента диффузии и уменьшению времени равновесного набухания.
- При одних и тех же условиях мелкие частицы резины набухают быстрее и достигают равновесного набухания раньше, чем крупные частицы резины.

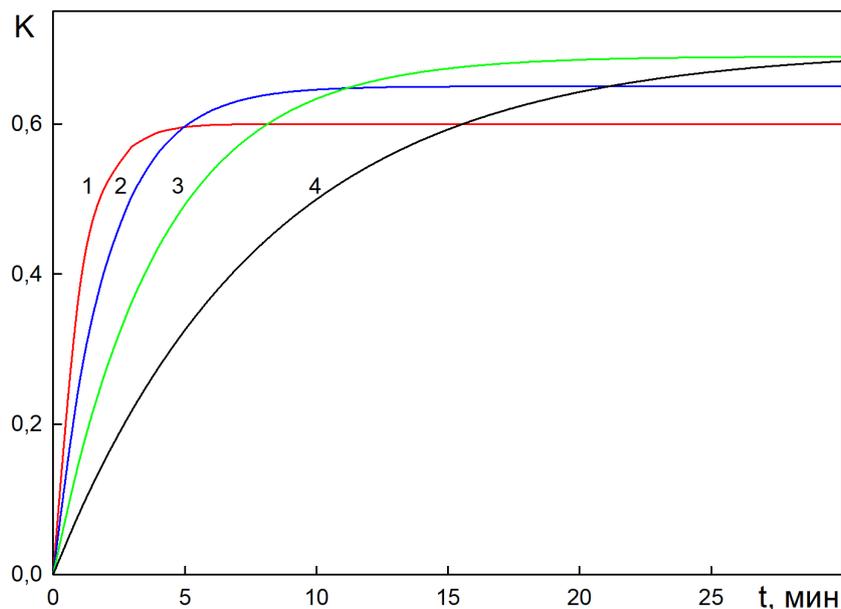


Рис. 2. Изменение коэффициента набухания. Изменение коэффициента набухания резиновой крошки различного начального размера с течением времени. Температура набухания составляет 230 °С. Начальный диаметр крошки равен: 1 — 0.3 мм, 2 — 0.6 мм, 3 — 0.9 мм, 4 — 1.2 мм

### Литература

1. Аюпов Д. А., Мурафа А. В., Хакимуллин Ю. Н., Хозин В. Г. Современные способы реенерации резин и возможности использования их в строительной отрасли // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2010. – № 1 (13). – С. 260–263.
2. Беляев П. С., Маликов О. Г., Меркулов С. А., Фролов В. А. Решение проблемы утилизации отходов резинотехнических изделий путем модификации дорожных вяжущих // Вестник ФГУИТ. – 2014. – № 2. – С. 129–131.
3. Иванов С. А., Шабаетов С. Н. Исследование влияния стадийности технологического процесса получения композиционных резинобитумных вяжущих на их свойства // Вестник ТГАСУ. – 2016. – № 4. – С. 153–158.
4. Оксак С. В. Влияние дробленой резиновой крошки на свойства битума и асфальтобетона // Вестник ХНАДУ. – 2017. – Вып. 79. – С. 133–137. Исследование процессов старения резинонаполненных битумных вяжущих // Успехи в химии и химической технологии. Том XXX. – 2016. – № 10. – С. 40–42.
5. Осипчик В. С., Костромина Н. Д., Олихова Ю. В., Ивашкина В. Н., Аристов В. М., Сербин С. А. Повышение эксплуатационных свойств резинонаполненных битумных вяжущих // Вестник технологического университета. – 2016. – Т. 19, № 8. – С. 50–53.
6. Покладий Я. Н., Панин А. В., Иванов С. А. Химизм процесса улучшения физико-химических параметров полимерно-битумного вяжущего на основе резиновой крошки // Строительные материалы и изделия. – 2015. – № 6. – С. 147–151.
7. Лукьянова М. А., Вахьянов Е. М. Обоснование рационального состава битумных вяжущих модифицированных резиновой крошкой // Вестник КузГТУ. – 2015. – № 4. – С. 143–146.
8. Руденская И. М., Руденский А. В. Использование отходов потребления и производства технической резины в дорожном строительстве // ОИ ЦБНТИ Росавтодора. – 1992. – Вып. 2. – 59 с.
9. Худякова Т. С., Шаповалова Н. В., Колеров Л. В., Попов С. М. Резиновая крошка в деле. Влияние комплексного модификатора на физико-механические свойства дорожного битума // Автомобильные дороги. – 2010. – № 7. – С. 56–61.

10. Слепой Б. М. Исследование некоторых свойств асфальтобетона с добавлением резины / Б. М. Слепой [и др.] // Труды Союздорнии. – Вып. 34. – М.: Транспорт, 1969. – С. 83–90.
11. Курденкова И. Б. Структура и свойства асфальтобетона на модифицированных твердыми полимерами минеральных материалах: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.23.05 / И. Б. Курденкова; науч. рук. д-р, проф. И.В. Королев; МАДИ. – М., 1999. – 19 с.
12. Иванова Т. Л. Модификация дорожного асфальтобетона резиновыми порошками механикоактивационного способа получения [Текст]: дис. на соиск. степ. канд. техн. наук / Т. Л. Иванова; СибАДИ. – Омск, 2009. – 192 с.
13. Прокопец В. С. Повышение эффективности дорожно-строительных материалов механикоактивационным модифицированием исходного сырья [Текст]: автореф. дис. на соиск. степ. док. техн. наук / В. С. Прокопец; СибАДИ. – Омск, 2005. – 34 с.
14. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале. Инженерно-Физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 3. – С. 544–547.
15. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале. Инженерно-Физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 1. – С. 192–199.
16. Матвиенко О. В. Исследование течения полимерно-битумного вязущего, описываемого моделью кросса, в цилиндрической трубе / О. В. Матвиенко, Н. С. Фирсанова, О. А. Скворцова, И. С. Черкасов // Инженерно-физический журнал. – 2025. – Т. 98, № 2. – С. 471–483.
17. Матвиенко О. В., Литвинова А. Е., Фирсанова Н. С. Исследование структуры течения полимерно-битумного вязущего, описываемого моделью Кросса, в трубе с внезапным расширением // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2022. – Т. 24, № 5. – С. 151–168.
18. Матвиенко О. В. Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 55. – С. 99–112.
19. Матвиенко О. В. Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – Т. 57, № 8-2. – С. 183–189.
20. Матвиенко О. В., Асеева А. Е. Математическое моделирование закрученного потока термовязкой псевдопластической жидкости Сиско в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93, № 4. – С. 857–869.
21. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Асеева А. Е. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости Балкли — Гершеля в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 1. – С. 215–226.
22. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Асеева А. Е. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости Балкли — Гершеля в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 6. – С. 2641–2651.
23. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Дульзон Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 5. – С. 1129–1137.
24. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Дульзон Н. К., Смирнова Н. Г., Агафонова М. В. Численное исследование структуры течения и теплообмена при закрученном течении битумно-дисперсных систем в цилиндрических каналах // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2014. – № 2 (43). – С. 80–93.
25. Матвиенко О. В., Унгер Ф. Г., Базуев В. П. Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем. – Томск: Изд-во ТГАСУ, 2015.

26. *Матвиенко О. В.* Исследование неустановившегося течения дилатантной жидкости с пределом текучести Балкли — Гершеля в цилиндрической трубе / О. В. Матвиенко, Н. С. Фирсанова // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2024. – № 4(97). – С. 146–154.

27. *Матвиенко О. В.* Исследование расходных характеристик установившегося течения высокопарафинистого битумного вяжущего в цилиндрической трубе / О. В. Матвиенко, А. Е. Литвинова, Н. С. Фирсанова // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2021. – Т. 23, № 5. – С. 71–85.

28. *Матвиенко О. В.* Исследование установившегося течения сгущающейся жидкости в цилиндрической трубе / О. В. Матвиенко, Н. С. Фирсанова // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2023. – № 2(91). – С. 157–167.

29. *Artamendi I., Khalid H. A.* Diffusion kinetics of bitumen into waste tyre rubber // Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists. – 2006. – 75. – P. 133–164.

30. *Abdelrahman M. A., Carpenter S. H.* Mechanism of the interaction of asphalt cement with crumb rubber modifier. Transportation Research Record // Journal of the Transportation Research Board. – 1999. – 1661. – P. 106–113.

31. *Ferapontov N. B., Gorshkov V. I., Parbuzina L. R., Trobov H. T. [et al.]* Heterophase model of swollen cross-linked polyelectrolyte // React. & Funct. Polym. – 1991. – Vol. 41. – P. 213–225.

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ

М. В. Огороков

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** Универсальным средством контроля точности численных решений дифракционных задач предлагается считать энергетический критерий. Его использование заключается в сравнении значений потока энергии рассеянной акустической волны, рассчитанных аналитически и численно. Применение энергетического критерия продемонстрировано на примере оценки точности решения методом конечных элементов модельной задачи о дифракции звука на сплошном шаре, находящемся в идеальной жидкости. Рассмотрены случаи абсолютно жесткого и однородного упругого шара при различных значениях волнового размера тела и характерного размера конечного элемента. Отмечено, что энергетический критерий также может использоваться для определения количества удерживаемых членов в бесконечных рядах, характеризующих акустические величины в аналитическом решении.

**Ключевые слова:** дифракция звука, энергетический критерий, точность численного решения, поток акустической энергии, сплошной шар, идеальная жидкость, рассеянная волна, дальняя зона поля, метод конечных элементов, относительное расхождение, количество удерживаемых слагаемых.

### Введение

Результаты решения задач дифракции звука на телах, имеющих различную структуру и конфигурацию, активно применяются во многих сферах человеческой деятельности. Они с успехом используются в гидроакустике, геофизике, дефектоскопии, материаловедении и т. д.

В большинстве случаев нетривиальность формы, а также неоднородность и анизотропия структуры тел, встречающихся на практике, приводят к значительному усложнению постановок дифракционных задач. В связи с этим точное аналитическое решение задач рассеяния звука на многих реальных объектах часто имеет очень громоздкий вид, который серьезно затрудняет анализ и качественную интерпретацию полученных результатов. По этой причине более рационально и эффективно находить численные решения.

В отдельных случаях при использовании численных методов для нахождения решений поставленных дифракционных задач могут возникать погрешности, которые в зависимости от своей величины способны серьезно повлиять на точность получаемых данных. Ее снижение приводит к искажению результатов исследований, что влечет за собой формулирование неверных выводов о рассматриваемом процессе.

Существенный прикладной потенциал численных решений делает особенно важной разработку средств контроля их точности и изучение влияния на нее геометрических и физических параметров постановки задачи, а также методов и алгоритмов, применяемых для определения значений искомым акустических величин. Однако, ввиду многообразия формулировок и способов решения задач теории дифракции, довольно трудно установить универсальный критерий для оценки точности расчетов. С этой целью потенциально можно использовать сравнение итогов вычислений с экспериментальными данными. Вот только результаты эксперимента сами практически всегда имеют погрешность и поэтому не могут рассматриваться в качестве эталона. В научной литературе описаны различные методики, позволяющие оценивать точность полученного решения. Однако применение конкретного подхода зависит

от направленности и специфики рассматриваемой дифракционной задачи. Поэтому данные методики не могут претендовать на универсальность, поскольку используются лишь в задачах определенного вида. Так, например, в [1, 2] указано, что для нахождения приближенных значений неизвестных коэффициентов разложений сначала необходимо вычислить невязки между соответствующими членами последовательных решений конечных систем, получаемых из бесконечной системы путем ее усечения с возрастающими значениями порядка усечения. А затем, сравнив наибольшую из невязок и заданную наперед точность, сделать вывод о целесообразности дальнейшего увеличения порядка усечения. Однако данный способ применим только тогда, когда для определения искомых акустических величин требуется решить бесконечную систему уравнений.

Как известно, наиболее общими законами в любой физической теории являются законы сохранения. Вследствие справедливости закона сохранения полной энергии для всех типов фундаментальных взаимодействий, представляется, что в качестве универсального средства для оценки точности численных решений дифракционных задач может выступать так называемый энергетический критерий. Его использование подразумевает под собой сравнение значений определенного энергетического показателя, рассчитанных аналитически и численно. Это и позволяет оценить точность численного решения.

Дифракционные задачи, в которых форма фронта звуковой волны, рассеянной телом, отлична от плоскости, в дальнейшем изложении будем называть пространственными дифракционными задачами. Установлено, что в задачах такого вида в качестве энергетической характеристики, используемой в разработанном критерии, должен выступать поток акустической энергии.

В настоящее время известны подходы к расчету данного энергетического показателя при решении задач дифракции звука на объектах различной формы и структуры. Фундаментальные основы по вычислению потока акустической энергии в дифракционных задачах содержатся в [3–5]. В [6] методом частичных областей определено звуковое поле точечного источника, расположенного в неоднородной морской среде с плавающим на поверхности телом цилиндрической формы. На основе полученного решения в ближнем поле исследован баланс среднего потока мощности в области с цилиндрическим выступом и среднего потока мощности в области, не содержащей указанный объект. Отношение мощностей излучения рассеянной рэлеевской волны и падающей волны Рэля рассчитано в [7] при различных соотношениях между скоростями продольной и поперечной волн в твердом теле. В [8] отмечено, что значительная погрешность в выполнении энергетического баланса свидетельствует о наличии ошибки в решении задачи о дифракции звука на абсолютно жесткой неподвижной сфере. При этом интегральный энергетический критерий заключается в проверке равенства усредненных по времени потока энергии в рассеянной волне и потока энергии взаимодействия падающего и рассеянного поля. В работе [9] показано, что суммарный поток энергии при прохождении звука через двумерный волновод сохраняется. Также авторами проведено графическое исследование зависимости отраженных и прошедших потоков энергии от частоты для различных структурных свойств волновода.

## 1. Постановка и численное решение модельной задачи

Рассмотрим применение энергетического критерия для оценки точности численного решения модельной пространственной дифракционной задачи. Для этого обратимся к задаче о рассеянии плоской звуковой волны, распространяющейся по направлению оси  $z$  декартовой системы координат и имеющей амплитуду  $A_0$ , сплошным шаром радиуса  $a$ . Пусть тело находится в идеальной жидкости с плотностью  $\rho$ , скорость звука в которой —  $c$ . Требуется определить акустическое поле, рассеянное шаром.

Звуковое давление падающей волны в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре тела запишется следующим образом:

$$p_0 = A_0 e^{ikr \cos \theta}, \quad (1)$$

где  $A_0$  — амплитуда давления;  $k$  — волновое число в жидкости.

Рассмотрим также представление  $p_0$  в виде суммы бесконечного ряда:

$$p_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (2)$$

где  $j_n(x)$  — сферическая функция Бесселя порядка  $n$ ;  $P_n(x)$  — многочлен Лежандра степени  $n$ .

Записав уравнение Гельмгольца для давления рассеянной волны  $p_s$  в сферической системе координат и решив его методом разделения переменных, получим, что искомое выражение для  $p_s$  с учетом условий излучения на бесконечности будет иметь вид:

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(kr) P_n(\cos \theta),$$

где  $A_n$  — коэффициенты, подлежащие определению;  $h_n(x)$  — сферическая функция Ханкеля первого рода порядка  $n$ .

Найдем численное решение поставленной дифракционной задачи методом конечных элементов с помощью программной среды для моделирования физических процессов COMSOL Multiphysics. При этом рассмотрим как абсолютно жесткий, так и однородный упругий шар, материал которого характеризуется плотностью  $\rho_1$  и коэффициентами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ .

Так как сферический объект находится в неограниченном пространстве, заполненном жидкостью, то напрямую применить метод конечных элементов нельзя, поскольку по своей природе он призван решать задачи для ограниченных областей [10]. Поэтому проведем искусственное усечение исследуемой области. С этой целью в жидкости, окружающей тело, выделим сферическую поверхность  $\Gamma_0$  радиуса  $R$ , соответствующего дальней зоне поля. Осевое сечение полученной геометрической модели приведено на рис. 1. Данная иллюстрация, как и все последующие, соответствует случаю однородного упругого шара.

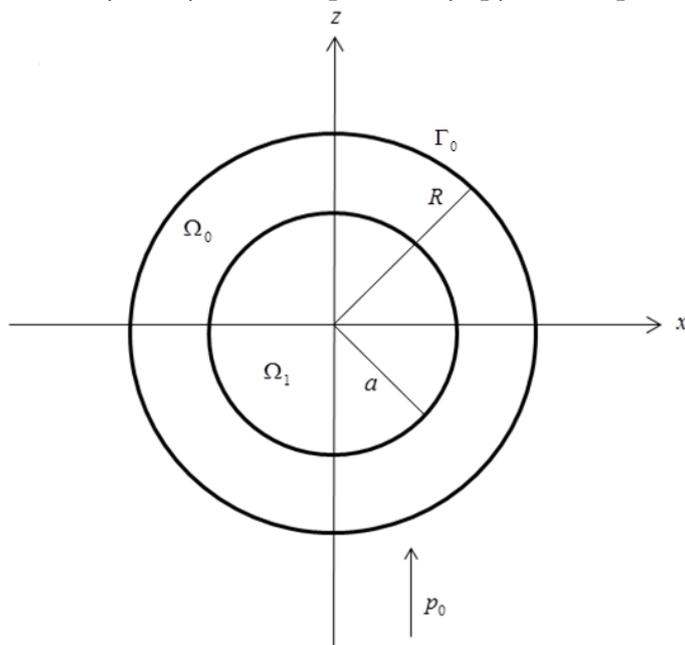


Рис. 1. Геометрическая модель, полученная после усечения области

Необходимо, чтобы полученная после усечения область  $\Omega_0$  вела себя так, как будто она простирается до бесконечности. Для этого на  $\Gamma_0$  в COMSOL Multiphysics зададим граничное

условие, моделирующее излучающие границы, — «Spherical Wave Radiation». Указанная опция позволяет добиться на  $\Gamma_0$  минимального отражения рассеянных шаром сферических волн обратно, в сторону упругого тела [10].

Чтобы найти решение задачи, покроем область  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$  конечно-элементной сеткой. Конечные элементы имеют форму треугольника. Для исследования точности численного решения рассмотрим следующие варианты возможных размеров конечных элементов: «крупный», «средний», «мелкий». Разбиение области  $\Omega$  на конечные элементы различной величины представлено на рис. 2. Так как возбуждаемые волновые поля не зависят от координаты  $\varphi$ , то достаточно изобразить лишь одну из половин шара.

## 2. Оценка точности численного решения

Оценку точности численного решения поставленной задачи предложено провести путем сравнения значений усредненного по времени потока энергии рассеянной волны, рассчитанных аналитически и численно.

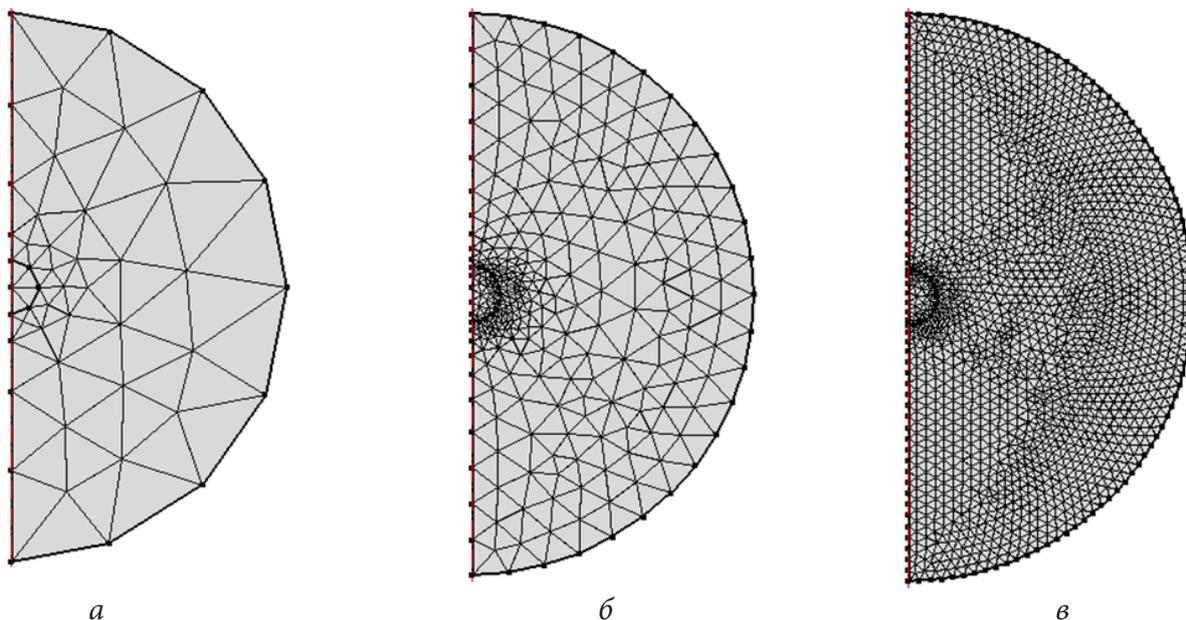


Рис. 2. Разбиение области  $\Omega$  на конечные элементы: а) размер элемента «крупный», б) размер элемента «средний», в) размер элемента «мелкий»

Усредненный по времени поток энергии рассеянной волны  $\langle W_s \rangle$  через сферическую поверхность  $S$ , окружающую шар и имеющую радиус  $r_1$ , вычисляется по следующей формуле:

$$\langle W_s \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S p_s V_{sn}^* dS,$$

где  $V_{sn}$  — нормальная к  $S$  составляющая колебательной скорости частиц в рассеянной волне. Здесь и далее звездочка «\*» означает комплексно сопряженную величину. Значение  $r_1$  можно выбрать произвольно, поскольку поток энергии сферической волны в отсутствие поглощения одинаков через сферу любого радиуса.

Так как нормаль к поверхности  $S$  совпадает с осью  $r$  сферической системы координат, то имеем, что

$$V_{sn}^* = \left( \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p_s}{\partial r} \right)^* = \frac{i}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* (h'_n(kr))^* P_n(\cos \theta),$$

где  $\omega$  — круговая частота;  $h'_n(x)$  — 1-я производная сферической функции Ханкеля первого рода.

Тогда поток рассеянной энергии  $\langle W_s \rangle$  вычисляется так:

$$\langle W_s \rangle = \frac{r_1^2}{2} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p_s V_{sn}^* \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$\langle W_s \rangle = \frac{r_1^2}{2} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{i \sin \theta}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(kr_1) P_n(\cos \theta) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* (h'_n(kr_1))^* P_n(\cos \theta) d\theta d\varphi.$$

Используем свойство ортогональности полиномов Лежандра:

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{2}{2n+1}, & n = k \end{cases}$$

и получим, что усредненный по времени поток энергии рассеянной волны равен

$$\langle W_s \rangle = \frac{2\pi r_1^2}{\rho c} \operatorname{Re} \left( i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{2n+1} h_n(kr_1) (h'_n(kr_1))^* \right). \quad (3)$$

Применение асимптотической формулы для сферической функции Ханкеля первого рода при больших значениях аргумента ( $kr_1 \gg 1$ ):

$$h_n(kr_1) \approx (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr_1}}{kr_1}$$

позволяет установить, что аналитически поток рассеянной энергии в дальней зоне акустического поля может быть определен так:

$$\langle W_s \rangle = \frac{2\pi}{\rho c k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{2n+1}. \quad (4)$$

В выражениях (3) и (4) в случае абсолютно жесткого шара

$$A_n = -A_0 i^n (2n+1) \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)},$$

где  $j'_n(x)$  — 1-я производная сферической функции Бесселя.

Для однородного упругого шара

$$A_n = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где  $\Delta$  — определитель матрицы  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & a_7 & a_8 \end{pmatrix}$ ;  $\Delta_1$  — определитель матрицы  $\begin{pmatrix} b_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & a_5 & a_6 \\ 0 & a_7 & a_8 \end{pmatrix}$ .

При описании элементов указанных матриц введены следующие обозначения:

$$a_1 = -\frac{ki}{\rho\omega} h'_n(ka); \quad a_5 = \frac{k_l^2}{i\rho_l\omega} (\lambda j_n(k_l a) - 2\mu j_n''(k_l a)); \quad b_1 = \frac{kA_0}{\rho\omega} i^{n+1} (2n+1) j'_n(ka);$$

$$a_2 = \frac{k_l}{\rho_1} j'_n(k_l a); \quad a_6 = \frac{2\mu n(n+1)}{i\rho_l\omega a} \left( k_\tau j'_n(k_\tau a) - \frac{j_n(k_\tau a)}{a} \right); \quad b_2 = A_0 i^n (2n+1) j_n(ka),$$

$$a_3 = -\frac{n(n+1)}{\rho_1 a} j_n(k_\tau a); \quad a_7 = \frac{2\mu}{a} \left( k_l j'_n(k_l a) - \frac{j_n(k_l a)}{a} \right);$$

$$a_4 = -h_n(ka); \quad a_8 = \mu \left( \frac{(2-n(n+1))j_n(k_\tau a)}{a^2} - k_\tau^2 j_n''(k_\tau a) \right);$$

где  $k_l = \omega / c_l$  — волновое число продольных упругих волн;  $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho_1}$  — скорость продольных волн;  $k_t = \omega / c_t$  — волновое число поперечных упругих волн;  $c_t = \sqrt{\mu / \rho_1}$  — скорость поперечных волн;  $j_n''(x)$  — 2-я производная сферической функции Бесселя.

Выражения (3) и (4) представляют собой суммы бесконечного числа слагаемых. Очевидно, что расчет такого количества членов крайне затруднителен, ввиду ограниченности вычислительных и временных ресурсов. Из-за описанных сложностей для получения требуемых результатов необходимо учитывать лишь некоторое конечное число слагаемых. Естественно, возникает вопрос: каким критерием нужно руководствоваться для определения их количества?

Решить указанную проблему также помогает применение энергетического критерия.

Вычислим усредненный по времени поток энергии падающей волны, приходящийся на поверхность нижней половины шара, по формуле

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} p_0 V_{0n}^* \sin \theta d\theta d\varphi \right),$$

где  $V_{0n}$  — нормальная к поверхности шара составляющая колебательной скорости частиц в падающей волне.

Рассмотрим представление падающей волны в экспоненциальном виде, т. е. в виде (1). Тогда

$$V_{0n}^* = \frac{A_0 \cos \theta}{\rho c} e^{-ikr \cos \theta},$$

и средний поток падающей акустической энергии, приходящийся на поверхность нижней половины шара, будет равен

$$W_0 = \frac{\pi a^2 A_0^2}{2 \rho c}.$$

В случае представления падающей волны с помощью выражения (2), т. е. в виде суммы ряда:

$$V_{0n}^* = \frac{iA_0}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) j_n'(kr) P_n(\cos \theta).$$

Отсюда находим, что усредненный по времени поток энергии акустической волны, падающей на поверхность нижней половины шара:

$$W_1 = \frac{\pi a^2 A_0^2}{\rho c} \operatorname{Re} \left( \int_0^{\pi/2} \left( i \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(ka) P_n(\cos \theta) \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) j_n'(ka) P_n(\cos \theta) \right) \sin \theta d\theta \right).$$

Рассмотрим функцию

$$W_1(N_1) = \frac{\pi a^2 A_0^2}{\rho c} \operatorname{Re} \left( \int_0^{\pi/2} \left( i \sum_{n=0}^{N_1} i^n (2n+1) j_n(ka) P_n(\cos \theta) \sum_{n=0}^{N_1} (-i)^n (2n+1) j_n'(ka) P_n(\cos \theta) \right) \sin \theta d\theta \right).$$

Поскольку запись падающей волны в форме (2) эквивалентна представлению (1), то естественно ожидать, что

$$W_0 = \lim_{N_1 \rightarrow \infty} W_1(N_1).$$

Тогда для наперед заданной точности вычислений  $\varepsilon_1$  первое из значений  $N_1$ , при котором

$$\frac{|W_0 - W_1(N_1)|}{\min(W_0, W_1(N_1))} < \varepsilon_1,$$

и будет являться порядком усечения рядов (3) и (4).

Численное решение задачи в COMSOL Multiphysics позволяет определить дискретные значения давления рассеянного поля в точках, расположенных на сферической поверхности бесконечно большого радиуса и отстоящих друг от друга на  $\alpha^\circ$  по полярному углу  $\theta$ .

Обозначим через  $p_{s,i}$  давление в дальней зоне при  $\theta = \pi\alpha(i-1)/180$ , где  $i = 1, 2, \dots, 180/\alpha + 1$ . Положим, что давление в точках, полярная координата которых отличается от полярной координаты одной из расчетных точек  $p_{s,i}$  не более чем на  $(\alpha/2)^\circ$ , равно давлению в соответствующей расчетной точке. Получим:

$$p_s(\theta) = \begin{cases} p_{s,1}, & \theta \in [0; \pi\alpha/360] \\ p_{s,i}, & \theta \in (\pi\alpha(i-1.5)/180; \pi\alpha(i-0.5)/180], i = 2, 3, \dots, 180/\alpha \\ p_{s,180/\alpha+1}, & \theta \in (\pi(1-\alpha/360); \pi]. \end{cases}$$

Во избежание повторного учета части расчетных точек, левые концы определенных отрезков исключаются из рассмотрения.

Вычислим потоки энергии на отрезках и полуинтервалах постоянства давления. Складывая найденные величины, получим суммарный поток энергии рассеянной волны в дальней зоне поля, рассчитанный численно:

$$W_{far} = \frac{\pi}{\rho c} \left( |p_{s,1}|^2 \int_0^{\pi\alpha/360} \sin^2 \theta d\theta + \sum_{i=2}^{180/\alpha} |p_{s,i}|^2 \int_{\pi\alpha(i-1.5)/180}^{\pi\alpha(i-0.5)/180} \sin^2 \theta d\theta + |p_{s,180/\alpha+1}|^2 \int_{\pi(1-\alpha/360)+\varepsilon_2}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \right),$$

где  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ .

Оценить точность численного решения позволяет анализ относительного расхождения между значениями потока энергии рассеянной волны, вычисленными аналитически и численно, т. е. между  $\langle W_s \rangle$  и  $W_{far}$ :

$$\delta = \frac{|\langle W_s \rangle - W_{far}|}{\min(\langle W_s \rangle, W_{far})} \times 100 \%. \quad (5)$$

### 3. Проведение численных исследований

Используя (5), исследуем точность численного решения, в случае если плоская звуковая волна единичной амплитуды падает на шар, расположенный в воде ( $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с). Пусть  $\alpha = 1^\circ$ . Рассмотрим различные волновые размеры тела и величины конечных элементов. При этом для более корректного описания волнового процесса во всех исследованных случаях отношение длины волны к характерному размеру конечного элемента полагалось большим 10. Полученные результаты для абсолютно жесткого и алюминиевого ( $\rho_1 = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 5.6 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu = 2.6 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>) шаров представлены в табл. 1.

Таблица 1

Оценка точности численного решения для различных волновых размеров тела и величин конечных элементов

Волновое число ( $k, \text{м}^{-1}$ ), радиус шара ( $a, \text{м}$ ), волновой размер тела ( $ka$ )	Размер конечного элемента	Отношение длины волны к характерному размеру конечного элемента	$\delta, \%$ (однородный упругий шар из алюминия)	$\delta, \%$ (абсолютно жесткий шар)
$k = 1, a = 1, ka = 1$	«крупный»	74.8	0.29	0.45
	«средний»	241.7	0.08	0.11
	«мелкий»	785.4	0.007	0.016
$k = 2, a = 1.5, ka = 3$	«крупный»	18.8	1.04	0.89
	«средний»	60.4	0.21	0.18
	«мелкий»	196.3	0.02	0.017

$k = 1.25, a = 4, ka = 5$	«крупный»	10.01	3.29	0.8
	«средний»	32.2	0.6	0.13
	«мелкий»	106.9	0.05	0.01

Определено, что с увеличением волнового размера однородного упругого шара ухудшается точность численного решения для любого из рассмотренных размеров конечных элементов. На основе табличных данных установлено, что для каждой из изученных величин конечных элементов усложнение структуры объекта сферической формы, т. е. переход от абсолютно жесткого тела к однородному упругому, приводит к росту  $\delta$ , начиная с  $ka = 3$ . Как и следовало ожидать, при увеличении размера конечных элементов (от «мелкого» до «крупного») наблюдается рост относительного расхождения для всех исследованных волновых размеров шара вне зависимости от его материала.

### Заключение

Исходя из вышеперечисленного, можно сделать вывод, что разработанный энергетический критерий является надежным средством, позволяющим оценивать точность численных решений дифракционных задач. К тому же энергетический критерий может применяться для определения количества удерживаемых слагаемых в бесконечных рядах, характеризующих акустические величины в аналитическом решении. Предполагается, что использование в COMSOL Multiphysics для усечения области пространства, окружающей исследуемое тело, подхода «Идеально согласованный слой» («Perfectly Matched Layer») вместо граничного условия, моделирующего излучающие границы, даст возможность повысить точность численных решений.

### Литература

1. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е. А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.
2. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на упругих цилиндрических и сферических телах с неконцентрическими полостями / Л. А. Толоконников, Ю. М. Филатова. – Тула : Издательство ТулГУ, 2014. – 116 с.
3. Хёнл Х. Теория дифракции / Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. – Москва : Мир, 1964. – 428 с.
4. Лепендин Л. Ф. Акустика / Л. Ф. Лепендин. – Москва : Высшая школа, 1978. – 448 с.
5. Морз Ф. Колебания и звук / Ф. Морз. – Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 497 с.
6. Папкина Ю. И. Энергетические характеристики звукового поля в неоднородной морской среде с плавающим на поверхности цилиндрическим телом / Ю. И. Папкина, С. О. Папков, А. А. Ярошенко // Морской гидрофизический журнал. – 2006. – № 3. – С. 52–59.
7. Разин А. В. Рассеяние поверхностной акустической волны Рэлея на неоднородности малых размеров в твёрдом полупространстве / А. В. Разин // Известия вузов. Радиофизика. – 2010. – Т. 53. – № 7. – С. 464–480.
8. Скобельцын С. А. Применение энергетического критерия для оценки точности решения задачи дифракции звука / С. А. Скобельцын, М. В. Огороков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 2–4 декабря 2024 г. – 2025. – С. 1244–1250.
9. Afsar H. Acoustic energy flux analysis of the bifurcated waveguide by varying outlet boundaries / H. Afsar, Y. Akbar, G. Kanwal // Waves in Random and Complex Media. – 2022. – P. 1–20.
10. Скобельцын С. А. Решение задач акустики с использованием метода конечных элементов / С. А. Скобельцын. – Тула : Издательство ТулГУ, 2018. – 224 с.

## ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ КРИОГЕННОЙ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

А. А. Ромахова, В. А. Сумин

*Воронежский государственный университет*

**Аннотация.** Получено аналитическое решение задачи о динамическом распределении температуры криогенной жидкости в квадратной области при граничных условиях первого рода.

**Ключевые слова:** граничные условия первого рода, уравнение теплопроводности, свободная конвекция, аналитическое решение, численное решение.

### Введение

В 20-м веке исследования в области естественной конвекции в жидкости с внутренним источником тепла набрали популярность в связи с возросшими потребностями ядерной энергетики [1]. В большей мере на актуальность данных исследований повлияли аварии на атомных электростанциях в США и Чернобыле, вследствие чего проблема безопасности атомной энергетики выделилась в отдельную область.

Анализ сценариев и предсказаний тяжелых аварий на атомных электростанциях показал важность задачи удержания радиоактивного горячего расплава в корпусе ядерного реактора. В ходе исследования я выяснила, что самым приемлемым вариантом для решения этой задачи служит метод внешнего охлаждения корпуса кипящей водой [2]. В связи с этим особую важность приобретает знание о закономерности распределения температуры, находящейся в замкнутом объёме, с внутренним источником тепла.

Поэтому в работе рассматривается задача хранения криогенной жидкости в специальных ёмкостях, имитируемых квадратной каверной с внешним источником тепла.

Под жидкостью будем считать смесь газов (жидкий азот, кислород в жидком водороде, углеводородные примеси в жидком кислороде). Чтобы выяснить закономерность явлений переноса теплоты возьмем геометрию в виде квадратной каверны. В данной работе предлагается решить задачу аналитически.

### Постановка задачи

Пусть на «смоченной» поверхности действует постоянный источник тепла  $q$ , обусловленный неидеальностью теплоизоляции. В начальный момент времени  $\tau = 0$  температура и концентрация примеси в объёме жидкости однородны и составляют  $t_0$  и  $c_0$  соответственно. При  $\tau > 0$  температура на стенке мгновенно изменяются до значений  $t_w$  и поддерживаются постоянными в ходе всего процесса. За начало координат выбирается левая угловая точка донной стенки и ось  $OX$  направлена по донной стенке, а ось  $OY$  перпендикулярно ей.

Изменение локальной температуры во внутренних точках рассматриваемой области должно быть определено из следующей начально-краевой задачи:

Уравнение теплопроводности [1]:

$$\rho C_p = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

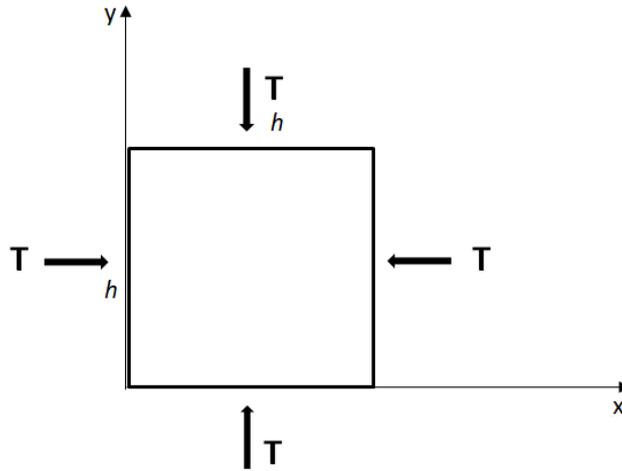


Рис. 1. Расчетная схема

Начальные условия:

$$t(x, y, 0) = 0. \quad (2)$$

Граничные условия:

$$t(0, y, \theta) = t(h, y, \theta) = 1; \quad (3)$$

$$t(x, 0, \theta) = t(x, h, \theta) = 1.$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) + \frac{q}{\rho C_p}, \quad (4)$$

где  $q$  — количество тепла, протекающего через тело,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $t$  — температура;  $\rho$  — плотность;  $\tau$  — текущее время.

Перейдём к безразмерному виду с помощью относительных переменных

$$X = \frac{x}{h}; \quad Y = \frac{y}{h}; \quad \theta = \frac{\tau}{\bar{\tau}}; \quad (5)$$

$$x = h * X; \quad y = Y * h; \quad \tau = \bar{\tau} \theta; \quad a = \frac{\lambda}{\rho C_p}, \quad (6)$$

где  $a$  — коэффициент температуропроводности.

Аналогично получаем выражения для начальных и граничных условий

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + 1; \\ T(X, Y, 0) = 0; \\ T(0, Y, \theta) = 1; T(1, Y, \theta) = 1; \\ T(X, 0, \theta) = T(X, 1, \theta) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

### Аналитическое решение

Для решения задачи применено конечное интегральное синус-преобразование Фурье по  $Y$  [3]:

$$F_Y [T(X, Y, \theta)] = T_Y(X, \theta) = \int_0^1 T(X, Y, \theta) \sin(\mu Y) dY; \quad (8)$$

И получим в нашем случае:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_Y}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T_Y}{\partial X^2} - \mu^2 T_Y - \frac{(\cos \mu - 1)(\mu^2)}{\mu}; \\ T_Y(X, 0) = 0; \\ T_Y(1, \theta) = T_Y(0, \theta) = -\frac{\cos \mu - 1}{\mu}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Применим синус-преобразование Фурье по  $X$ :

$$F_X [T(X, \theta)] = T_{XY}(\theta) = \int_0^1 T_Y(X, \theta) \sin(\lambda Y) dX; \quad (10)$$

$$F_X \left[ \frac{\partial T_Y}{\partial \theta} \right] = \frac{dT_{YX}}{d\theta}; \quad F_X [T_Y] = T_{YX}; \quad (11)$$

$$F_X [1] = \int_0^1 \sin(\lambda X) dX = -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda X) \Big|_0^1 = -\frac{\cos \lambda - 1}{\lambda}. \quad (12)$$

Тогда получим систему в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_{YX}}{d\theta} = \frac{\lambda(\cos \mu - 1)(\cos \lambda - 1)}{\mu} - \lambda^2 T_{YX} - \mu^2 T_{YX} + \\ + \frac{(\cos \mu - 1)(\cos \lambda - 1)(\mu^2 + 1)}{\mu \lambda}; \\ T_{YX}(0) = 0; \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_{YX}}{d\theta} = C * T_{YX} + A; \\ T_{YX}(0) = B. \end{array} \right. \quad (14)$$

$$T_{YX}(\theta) = \left( B + \frac{A}{C} \right) e^{C\theta} - \frac{A}{C}. \quad (15)$$

В нашем случае

$$C = -(\lambda^2 + \mu^2);$$

$$A = \frac{(\cos \mu - 1)(\cos \lambda - 1)(\lambda^2 + \mu^2 + 1)}{\mu \lambda}; \quad (16)$$

$$B = 0;$$

$$T_{YX} = -\frac{(\cos \mu - 1)(\cos \lambda - 1)(\lambda^2 + \mu^2 + 1)}{\mu \lambda (\lambda^2 + \mu^2)} * \left[ e^{-(\lambda^2 + \mu^2)\theta} - 1 \right]. \quad (17)$$

Применяя двукратно обратное преобразование Фурье получим выражение для температуры:

$$T = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\cos \mu_m - 1)(\cos \lambda_n - 1)(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + 1)}{\mu_m * \lambda_n (\lambda_n^2 + \mu_m^2)} * \left[ e^{-(\lambda_n^2 + \mu_m^2)\theta} - 1 \right] * \sin(\lambda_n X) \sin(\mu_m Y) \quad (18)$$

где  $\lambda_n = \pi n$ ;  $\mu_m = \pi m$ .

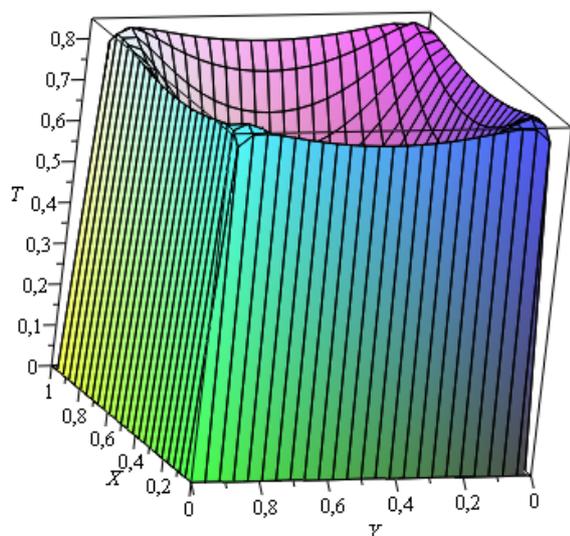


Рис. 2. График решения задачи для  $\theta = 0,03$

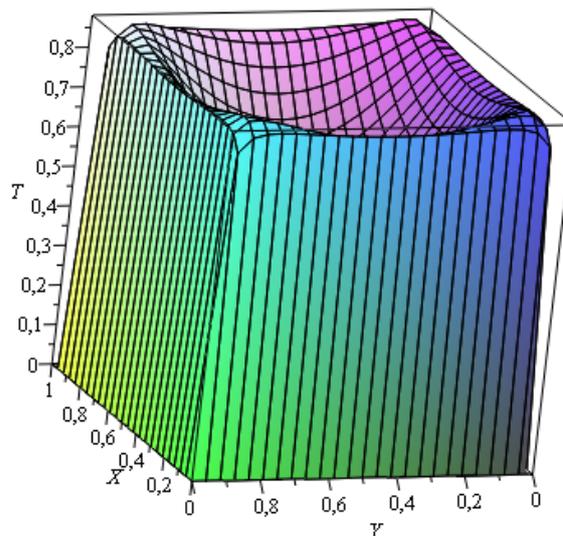


Рис. 3. График решения задачи для  $\theta = 0,05$

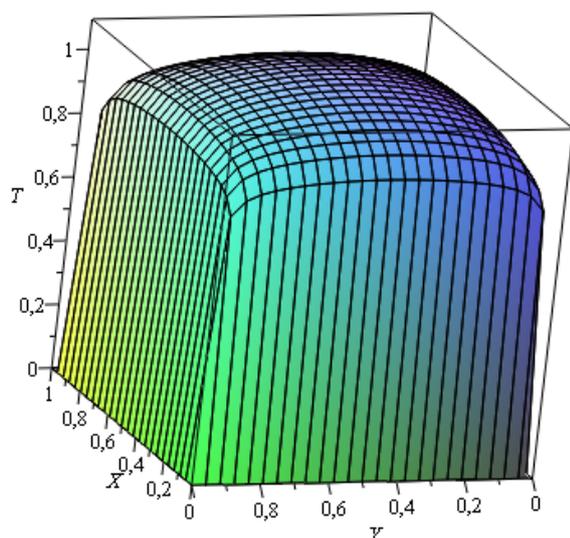


Рис. 4. График решения задачи для  $\theta = 0,3$

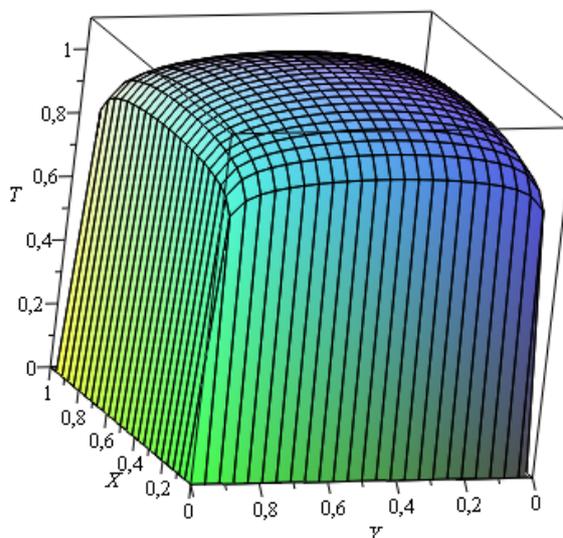


Рис. 5. График решения задачи для  $\theta = 0,5$

### Заключение

В данной работе аналитически была решена задача о динамическом распределении температуры криогенной жидкости в квадратной области при граничных условиях первого рода. Полученные графические данные о поведении температурных полей при свободно конвективном движении криогенных жидкостей показали, что математическая модель физически корректна описывает структуру температурного поля.

### Литература

1. Большов Л. А., Кондратенко П. С., Стрижов В. Ф. Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости // УФН. – 2001. – Т. 171, № 10. – С. 1051–1070.
2. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М. : Мир, 1990. – 384 с.
3. Матросов А. В. MAPLE. Решение задач высшей математики и механики.

## К СТРУКТУРЕ УРАВНЕНИЙ БУССИНЕСКА

А. И. Руденко

*Калининградский государственный технический университет*

**Аннотация.** Рассматривается классическое двумерное уравнение Буссинеска для безвихревого течения, в котором горизонтальная и вертикальная компоненты скорости являются неусредненными величинами. Показано, что уравнения Эйри являются частным случаем уравнения Буссинеска.

**Ключевые слова:** гравитационная волна, уравнение Буссинеска, уравнение Эйри.

## Введение

Рассматриваются уравнения Буссинеска в рамках двумерной модели для однородной несжимаемой жидкости, когда движения потенциальные [5]. Поскольку данные уравнения, по праву, относятся к классическим уравнениям, то они отражены в большинстве задач теоретической гидродинамики, например, [6–8]. Замечательным свойством данных уравнений является то, что они позволяют описать характеристики поверхностных гравитационных волн [2–4]. В качестве основы для анализа структуры уравнений Буссинеска была выбрана работа [1], где описан вывод уравнений через функцию потенциала скорости, составляющие компоненты которой являются неусредненными величинами.

В данной статье была увеличена точность в разложении функции потенциала скорости до  $O(\delta^8)$ . Другой подход к получению уравнений Буссинеска с кубической нелинейностью был описан в [9].

Уравнения для идеальной, несжимаемой однородной жидкости запишем в виде:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + \rho^{-1}\nabla p = \vec{g}, \quad (1)$$

$$\nabla\vec{u} = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{u} = \vec{u}(t, x, y)$  есть функция скорости, которая может быть разложена на горизонтальную компоненту  $u_0$  и вертикальную компоненту  $v_0$  скорости. Поскольку  $\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\cdot\vec{u} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\gamma^2}{2}\right) - \vec{u} \times \text{rot}\vec{u}$ ,  $\gamma^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ , тогда (1) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \text{rot}\vec{u} + \nabla(\rho^{-1}p + 2^{-1}\gamma^2) = \vec{g}. \quad (3)$$

В случае безвихревого потенциального течения ( $\text{rot}\vec{u} = 0$ ,  $\vec{u} = \nabla\varphi$ ,  $\varphi$  — функция потенциала скорости), формула (3) примет вид:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nabla(\rho^{-1}p + 2^{-1}\gamma^2 + G) = 0, \quad (4)$$

где  $G = -\vec{g} \cdot \vec{x} = g z$ .

Интегрируя (4), приходим к уравнению Бернулли:

$$p = p_a - \rho \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2^{-1}\gamma^2 - \vec{g} \cdot \vec{x} \right), \quad (5)$$

где  $p_a$  — атмосферное давление. Необходимо отметить, что (5) представляет собой зависимость давления для заданного распределения скоростей.

Таким образом, для решения системы уравнений (5) и (2), введем граничные условия.

В качестве первого граничного условия выберем кинематическое условие, полагая, что субстанциональная производная  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial}{\partial y} + \varphi_z \frac{\partial}{\partial z}$  для скалярной функции  $f = z - \eta(t, x, y)$ ,  $\eta(t, x, y)$  — функция профиля свободной поверхности, равна нулю:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varphi_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + \varphi_z = 0. \quad (6)$$

Вторым граничным условием является динамическое условие. Пусть над свободной поверхностью перенос воздушных масс пренебрежимо мал,  $p_a = \text{const}$ , тогда давление может быть определено  $p = p_a + T(\nabla \cdot \vec{n})$ ,  $T$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\nabla \cdot \vec{n}$  — суммарная кривизна на свободной поверхности. Тогда с учетом (5), динамическое условие будет записано:

$$\varphi_t + 2^{-1}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + \rho^{-1}T(\nabla \cdot \vec{n}) + g\eta = 0, \quad z = \eta(t, x, y). \quad (7)$$

### Двумерная задача

Постановка задачи. Требуется получить двумерные уравнения Буссинеска для волн на поверхности воды, используя разложение потенциала скорости с точностью до третьего приближения.

Для решения поставленной задачи, на первом этапе, представим потенциал скорости:

$$\varphi = \varphi_0(t, x, y, z') + \delta^2 \varphi_1(t, x, y, z') + \delta^4 \varphi_2(t, x, y, z') + \delta^6 \varphi_3(t, x, y, z') + O(\delta^8), \quad z' = z + 1. \quad (8)$$

Поскольку завихренность равна нулю, то согласно уравнению Лапласа,  $\Delta \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{z'z'} = 0$  можно записать:

$$\delta^2 \varphi_{xx} + \Delta^2 \varphi_{yy} + \varphi_{z'z'} = 0, \quad (9)$$

$\delta = h_0 \lambda_0^{-1}$ ,  $\Delta = h_0 \mu_0^{-1}$  — безразмерные параметры;  $h_0$  — глубина жидкости,  $\lambda_0$  — длина волны вдоль  $ox$ ,  $\mu_0$  — длина волны вдоль  $oy$ .

Пусть  $T = 0$ , тогда, тогда граничные условия (6), (7) будут иметь вид:

$$\varphi_{z'} = \delta^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \left( \delta^2 \varphi_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \Delta^2 \varphi_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad (10)$$

$$\varphi_t + 2^{-1} \left( \varepsilon \varphi_x^2 + \varepsilon \frac{\Delta^2}{\delta^2} \varphi_y^2 + \frac{\varepsilon}{\delta^2} \varphi_{z'}^2 \right) + g\eta = 0. \quad (11)$$

С учетом предположения  $\Delta^2 = \delta^2$ , (9)–(11) будут записаны:

$$\delta^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \varphi_{z'z'} = 0, \quad (12)$$

$$\varphi_{z'} = \delta^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \left( \varphi_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right), \quad (13)$$

$$\varphi_t + 2^{-1} \varepsilon \left( \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \frac{1}{\delta^2} \varphi_{z'}^2 \right) + g\eta = 0. \quad (14)$$

Зададим: потенциал скорости  $\varphi_0(t, x, y) = F(t, x, y)$ ;  $u_0(t, x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $v_0(t, x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$  — компоненты скорости. Применительно к (12) можно записать:  $\varphi_{1z'z'} = -\delta^2 (\varphi_{0xx} + \varphi_{0yy})$ ,  $\varphi_{2z'z'} = -\delta^2 (\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy})$ ,  $\varphi_{3z'z'} = -\delta^2 (\varphi_{2xx} + \varphi_{2yy})$ . Откуда находим:

$$\varphi_0 = F(t, x, y),$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= -\frac{1}{2!} z'^2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right), \\
\varphi_2 &= \frac{1}{4!} z'^4 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right), \\
\varphi_3 &= -\frac{1}{6!} z'^6 \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y \partial x^4} + 2 \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y^3 \partial x^2} \right) + \frac{\partial^5 u_0}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y^5} \right). \quad (15)
\end{aligned}$$

С учетом (15) разложение потенциала (8) можно переписать:

$$\begin{aligned}
\varphi &= F(t, x, y) - \frac{1}{2!} \delta^2 z'^2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{1}{4!} \delta^4 z'^4 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) - \\
&- \frac{1}{6!} \delta^6 z'^6 \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y \partial x^4} + 2 \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y^3 \partial x^2} \right) + \frac{\partial^5 u_0}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y^5} \right) + O(\delta^8), \quad z' = 1 + \varepsilon \eta(t, x, y). \quad (16)
\end{aligned}$$

С учетом (16) кинематическое условие (13) и динамическое условие (14) соответственно могут быть записаны в следующих формах:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 + \varepsilon \eta) u_0) + \frac{\partial}{\partial y} ((1 + \varepsilon \eta) v_0) - \frac{k_0 \varepsilon}{3!} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) + \\
+ \frac{(k_0 \varepsilon)^2}{5!} \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y \partial x^4} + 2 \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y^3 \partial x^2} \right) + \frac{\partial^5 u_0}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y^5} \right) = 0, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{(k_0 \varepsilon)^2}{2!} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{(k_0 \varepsilon)^4}{4!} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) + \eta + \frac{1}{2} \varepsilon (u_0^2 + v_0^2) = 0. \quad (18)$$

Необходимо отметить, что в (13) сохранены члены до порядка  $\delta^6$ ,  $\varepsilon^4$ ,  $\delta^4 \varepsilon^2$ , а в (14) до порядка  $\delta^4$ ,  $\varepsilon^2$ ; в (13) и (14) выполнена замена  $\delta^2 = k_0 \varepsilon$ .

Продифференцируем (18) по  $x$ , а затем по  $y$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{(k_0 \varepsilon)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{(k_0 \varepsilon)^4}{4!} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) + \\
+ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{(k_0 \varepsilon)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{(k_0 \varepsilon)^4}{4!} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) + \\
+ \frac{\partial \eta}{\partial y} + \varepsilon \left( u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0. \quad (20)
\end{aligned}$$

Поскольку течение является потенциальным,  $\frac{\partial v_0}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y}$ , то в (19) и (20) в последнем слагаемом была произведена замена.

## Выводы

Устремим  $k_0 \rightarrow 0$ , тогда (17), (19), (20), приближенные уравнения Буссинеска, примут вид уравнений Эйри для мелкой воды:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((1 + \varepsilon \eta) u_0) + \frac{\partial}{\partial y} ((1 + \varepsilon \eta) v_0) = 0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \varepsilon \left( u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0.$$

В последних формулах составляющие скорости являются неусредненными величинами.

### Литература

1. Зейтунян Р. Х. Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны // УФН. – 1995. – Т. 165, № 12. – С. 1403–1456.
2. Бабенко К. И. Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 294, № 5. – С. 1033–1037.
3. Karabut E. A. An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. – 1998. – V. 372. – P. 45–70.
4. Fenton J. D. A high-order conidial wave theory // J. Fluid Mech. – 1979. – V. 94. – P. 129–161.
5. Boussinesq J. Theorie des ondes et des remous qei se propagent // Jour. Math. Pures Appl. – 1872. – V. 17, No 2. – P. 55–108.
6. Красовский Ю. П. Теория установившихся волн конечной амплитуды // Журнал вычислит. математ. и математ. физики. – 1961. – Т. 1. – С. 836–855.
7. Тер-Крикоров А. М. Существование периодических волн, вырождающихся в уединенную // Прикладн. математика и механика. – 1960. – Т. 24, Вып. 4. – С. 622–636.
8. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. – М. : Наука, 1984.
9. Руденко А. И. Некоторое дополнение к уравнению Буссинеска стационарной слабонелинейной волны на мелкой воде // Волны и вихри в сложных средах: 15-ая международная конференция – школа молодых ученых; 19 – 22 ноября 2024 г., Москва: Сборник материалов школы. – М. : ООО «ИСПОпринт», 2024. – С. 189–190.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В КАНАЛЕ

Д. А. Тукмаков

*Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН*

**Аннотация.** В данной статье проводится численное моделирование колебаний столба аэрозоля в трубах на резонансных частотах. Выведена математическая модель динамики гетерогенной среды-смеси с приблизительно равными массовыми долями компонент. Математическая модель предполагает решение полной системы уравнений динамики для каждой из компонент смеси. Несущая среда представляет собой вязкий, сжимаемый, теплопроводный газ. Дисперсная составляющая аэрозоля описывается уравнением сохранения средней плотности, уравнениями сохранения компонент импульса, уравнением сохранения энергии. Математическая модель предполагает учёт сил взаимодействия газа и капель аэрозоля, в качестве таких сил рассмотрены — сила Стокса, сила Архимеда и сила присоединенных масс, также учитывался межкомпонентный теплообмен.

**Ключевые слова:** численное моделирование, газовзвеси, акустический резонатор, межфазное взаимодействие.

### Введение

Одной из областей математического моделирования является моделирование динамических процессов в сплошных средах [1–16]. Частным случаем динамических процессов являются резонансные колебания столба газа в трубах и каналах [1]. Так как многие математические модели гидродинамики имеют нелинейный характер для интегрирования уравнений гидродинамики применяются численные методы. В некоторых случаях в качестве объекта моделирования рассматриваются течения неоднородных сред. В отличие от классической гидродинамики [2] в гидродинамике неоднородных сред [3] течения определяются взаимодействием между компонентами смеси.

В монографии [3] представлена общая теория динамики многофазных сред.

В монографии [4] в одномерном приближении, без учета вязкости среды разработаны математические модели проведены численные расчеты динамики запыленных, газокапельных и порошковых сред.

В монографии [5] разработаны магматические модели, численные алгоритмы моделирования и приведены результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесах металлических частиц.

В исследовании [6] в статье численно исследуется влияние динамических процессов двухфазной среды на производительность башенной испарительной градирни. Математическая модель не учитывала двухфазный состав смеси.

В публикации [7] исследованы аэродинамические характеристики сухого инерционного пылеуловителя с соосными трубами. Математическая модель основана на численном решении системы уравнений Навье — Стокса однородной среды и не учитывала динамику дисперсных частиц.

Интерес к динамике дисперсных частиц в акустических полях связан с вопросами промышленной экологии, энергетики и химической промышленности. При этом часто в исследовании пренебрегается многофазным составом моделируемой среды — динамикой газа при исследовании массопереноса частиц или учетом влияния дисперсных частиц при описании потока неоднородной среды.

Применяемая в данной работе математическая модель учитывала межфазный теплообмен и межфазный обмен импульсом.

В работе исследовано влияние дисперсности частиц на параметры динамики несущей среды и дисперсных включений при колебаниях аэрозоля в закрытой трубе на частоте второго линейного резонанса закрытой трубы.

### Материалы и методы

Математическая модель реализовывала континуальную методику моделирования динамики неоднородных сред позволяющую учесть межфазных обмен импульсом и энергией с дисперсной фазой [4, 8–12].

В качестве несущей среды рассматривается сжимаемый газ, движение которого описывается системой уравнений Навье — Стокса [13, 14].

В осесимметричной системе координат в двумерном случае [14] система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\rho v / y, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = (\rho uv + \tau_{xy}) / y + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - F_x, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = (-\rho v^2 + \tau_{yy}) / y + \alpha \frac{\partial p}{\partial y} - F_y, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( [e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( [e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \\ & = \left( -v(e + (1 - \alpha)p - \tau_{yy}) + \tau_{xy}u - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) / y + \alpha \frac{\partial}{\partial x}(up) + \alpha \frac{\partial}{\partial y}(vp) - Q - |F_x|(u - u_1) - |F_y|(v - v_1) \end{aligned} \quad (4)$$

$$p = (\gamma - 1) \left( e - 0.5\rho(u^2 + v^2) \right), \quad e = \rho I + 0.5\rho(u^2 + v^2),$$

$$\tau_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right),$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y}.$$

Здесь  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $e$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  — плотность, составляющие скорости несущей и дисперсной среды, полная энергия, коэффициенты теплопроводности и вязкости несущей среды. Величины  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $Q$  — задаются законами межфазного трения и теплообмена.  $I = RT / (\gamma - 1)$  — внутренняя энергия газа.

Движение дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности [4, 8–12], уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения внутренней энергии:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} = -\rho_1 v_1 / y, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1) = -\rho_1 u_1 v_1 / y + F_x + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1^2) = -\rho_1 v_1^2 / y + F_y + \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(e_1 v_1) = -e_1 v_1 / y + Q, \quad (8)$$

$$\rho_1 = \alpha \rho_{10}, \quad e_1 = \rho_1 C_p T_1,$$

где  $T_1$ ,  $e_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\alpha$  — температура дисперсной фазы, внутренняя энергия дисперсной фазы, средняя плотность и объемное содержание;  $C_p$ ,  $\alpha_{10}$  — теплоемкость и плотность вещества твердой фазы.

Все частицы предполагаются одинакового размера и сферической формы, здесь  $C_d$  — коэффициент аэродинамического сопротивления частиц [4].

Составляющие силы трения  $F_x$  и  $F_y$  задаются следующим образом [3]:

$$F_x = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2} (u - u_1) + \alpha \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+ 0.5 \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right),$$

$$F_y = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2} (v - v_1) + \alpha \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) +$$

$$+ 0.5 \alpha \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial t} - u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right),$$

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}_{10}} + \frac{4}{\text{Re}_{10}^{0.5}} + 0.4,$$

$$M_{10} = |\bar{V} - \bar{V}_1| / c,$$

$$|V| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad |V_1| = \sqrt{u_1^2 + v_1^2},$$

$$\text{Re}_{10} = \rho |\bar{V} - \bar{V}_1| d / \mu,$$

$$\text{Pr} = \gamma C_p \mu / \lambda,$$

$$Nu_1 = 2 \exp(-M_{10}) + 0.459 \text{Re}_{10}^{0.55} \text{Pr}^{0.33}, \quad 0 \leq M_{10} \leq 2, \quad 0 \leq \text{Re}_{10} < 2 \cdot 10^5.$$

Температура несущей среды находится из уравнения:  $T = (\gamma - 1)(e / \rho + 0.5(u^2 + v^2)) / R$ . Внутренняя энергия взвешенной в газе твердой фазы определяется как  $e_1 = \rho_1 C_p T_1$ .

В уравнение энергии для несущей фазы входит коэффициент теплопроводности газа  $\lambda$  и тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей [4]:  $Q = 6 \alpha Nu_1 \lambda (T - T_1) / d^2$ .

Полученные системы дифференциальных уравнений в частных производных — (1)–(8) решалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [13] с расщеплением по пространственным направлениям [14] и схемой нелинейной коррекции [15, 16].

Сопоставление аналитических расчетов для однородного идеального газа с численными расчетами проведено в работе [12].

## Результаты и их обсуждение

Рассмотрим динамику монодисперсной газовзвеси при резонансных режимах колебаний несущей среды в закрытой цилиндрической трубе, продольные колебания в которой возбуждаются поршнем, перемещающимся по гармоническому закону — рис. 1. В численных расчетах длина трубы составляла  $L = 1$  м, диаметр  $d = 0.06$  м.

Газовзвесь в начальный момент времени представляет собой смесь воздуха с равномерно распределенными в объеме резонатора частицами твердой фазы — сферами одинакового диаметра с фиксированной плотностью вещества.

В начальный момент времени газовзвесь неподвижна, температуры фаз равны  $T_0 = T_{10}$ , заданы плотность воздуха, вещества дисперсной фазы и ее объемное содержание —  $\alpha$ . При

$t = 0$  поршень начинал движение по гармоническому закону  $x(t) = a \cdot \sin(\omega t)$ , где  $\omega$  — вторая резонансная частота колебаний газового столба в закрытом акустическом резонаторе,  $\omega_2 = 2\pi c / L$ ,  $a = 1$  мм.

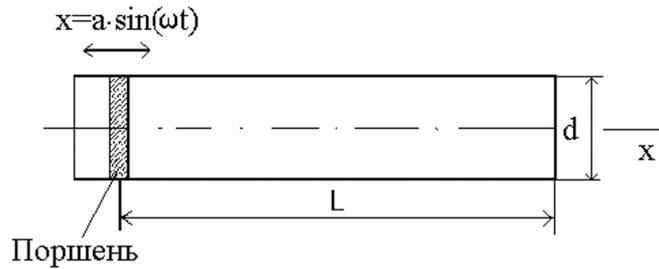


Рис. 1. Схема резонатора

При постановке численных экспериментов задавалась плотность вещества дисперсной фазы —  $\rho_{10} = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и начальная средняя плотность дисперсной фазы. В начальный момент времени и газ и частицы неподвижны, задана одинаковая температура газа и частиц —  $T_0 = 293$  К. При расчетах на неподвижных поверхностях, в частности закрытом конце трубы все составляющие скорости фаз приравнивались нулю, для остальных газодинамических функций задавались однородные граничные условия второго рода. На оси трубы для составляющих скорости ставились условия симметрии, для плотности, давления и температуры однородные граничные условия второго рода. На поверхности поршня осевая составляющая скорости изменялась по гармоническому закону, радиальная составляющая скорости приравнивалась нулю.

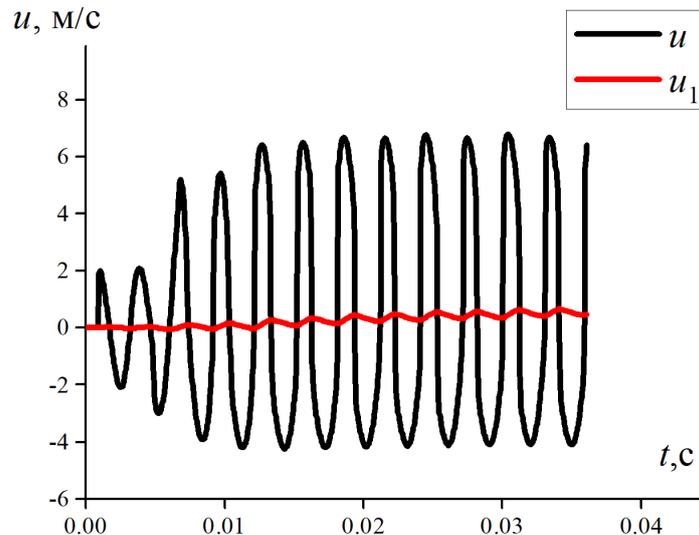


Рис. 2. Продольная составляющая скорости для размера частиц  $d = 200$  мкм, объемное содержание дисперсной фазы  $\alpha = 0.0001$

В работе исследовано влияние объемного содержания дисперсной фазы на интенсивность колебаний несущей среды крупнодисперсной газозвеси ( $d = 200$  мкм) — рис. 2, 3. Выявлено, что при увеличении объемного содержания дисперсной фазы уменьшается величина размаха продольной скорости несущей среды.

### Выводы

В работе представлены результаты численного моделирования динамики газозвеси в акустическом резонаторе — закрытой трубе. Математическая модель реализовывала континуаль-

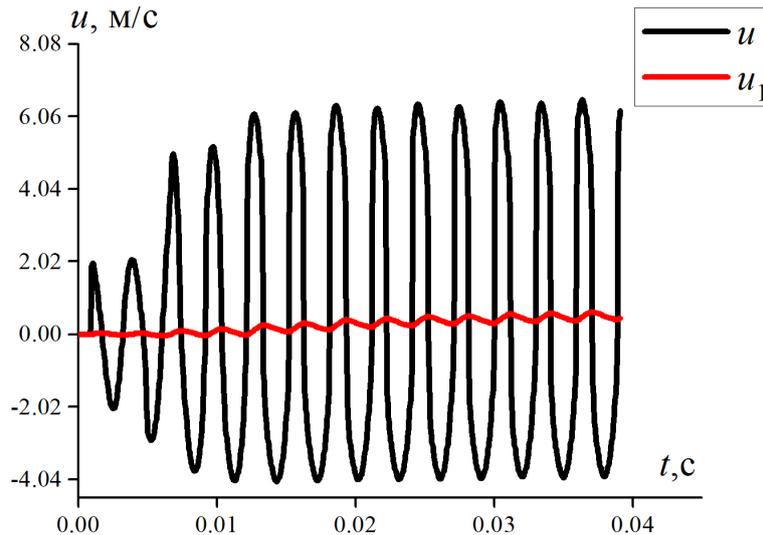


Рис. 3. Продольная составляющая скорости для размера частиц  $d = 200$  мкм, объемное содержание дисперсной фазы  $\alpha = 0.001$

ную методику моделирования динамики неоднородных сред, также учитывалась вязкость и теплопроводность несущей среды. Численные расчеты демонстрируют, что при увеличении объемного содержания дисперсной фазы скорость несущей среды уменьшается как для аэрозолей с мелкодисперсными частицами, так и для аэрозолей с крупнодисперсными частицами. При этом скорость несущей среды в аэрозоле с мелкодисперсными частицами существенно меньше скорости несущей среды в аэрозоле с крупнодисперсными частицами. Скорость дисперсной фазы для мелкодисперсных аэрозолей согласуется со скоростью газа. Скорость дисперсной фазы крупнодисперсных частиц существенно меньше скорости несущей среды. Также расчеты показывают, что для малых объемных содержаний концентрирование дисперсных включений под действием резонансных акустических колебаний газа происходит более интенсивно.

### Благодарности

Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

### Литература

1. Красильников В. А. Введение в физическую акустику / В. А. Красильников, В. В. Крылов. – Москва : Наука, 1984. – 403 с.
2. Лоицянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лоицянский. – Москва : Дрофа, 2003 – 784 с.
3. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. – Москва : Наука, 1978 – 336 с.
4. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А. Г. Кутушев. – Санкт-Петербург : Недра, 2003 – 284 с.
5. Федоров А. В. Волновые процессы в газовзвесах частиц металлов / А. В. Федоров, В. М. Фомин, Т. А. Хмель. – Новосибирск : Параллель, 2015 – 301 с.
6. Доброго К. В. Моделирование башенной испарительной градирни и влияния аэродинамических элементов на ее работу в условиях ветра / К. В. Доброго, К. М. Хеммасиан, Е. Е. Ласко // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2014. – № 6. – С. 47–60.

7. Зинуров В. Э. Численное моделирование газодинамики в центробежном классификаторе / В. Э. Зинуров, А. В. Дмитриев, Н. Ф. Сахибгареев, Д. Н. Латыпов, М. Г. Гарипов // Вестник Технологического университета. – 2021. – Т. 24, № 12. – С. 128–132.
8. Губайдуллин Д. А. Численное моделирование прохождения прямого скачка уплотнения по взвеси с неравномерной концентрацией твердых частиц / Д. А. Губайдуллин, Д. А. Тукмаков // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – 2018. – Т. 20, № 7-8. – С. 117–123.
9. Тукмаков Д. А. Численное моделирование ударно-волнового течения в нейтральной и электрически заряженной газовзвеси / Д. А. Тукмаков // Advanced Science. – 2019. – № 4 (15). – С. 16–22.
10. Ахунов А. А. Численное исследование распространения ударной волны предельно малой интенсивности из чистого газа в электрически заряженную запылённую среду / А. А. Ахунов, Н. А. Тукмакова, Д. А. Тукмаков // Ученые записки Забайкальского государственного университета. – 2020. – Т. 15, № 3. – С. 6–18.
11. Тукмаков Д. А. Численное моделирование отражения ударной волны в аэрозоле с однородной и многофракционной дисперсной компонентой / Д. А. Тукмаков // Тенденции развития науки и образования. – 2020. – № 61-1. – С. 79–84.
12. Ахунов А. А. Численное исследование влияния плотности материала дисперсных включений на процесс разлета газовзвеси в вакуум / А. А. Ахунов, Д. А. Тукмаков // Вестник Забайкальского государственного университета. – 2020. – Т. 26, № 3. – С. 6–14.
13. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. / К. Флетчер. – Москва : Мир, 1991. – 552 с.
14. Ковеня В. М. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики / В. М. Ковеня, Г. А. Тарнавский, С. Г. Черный. – Новосибирск : Наука, 1990 – 247 с.
15. Музафаров И. Ф. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа / И. Ф. Музафаров, С. В. Утюжников // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5, № 3. – С. 74–83.
16. Тукмаков А. Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе / А. Л. Тукмаков // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2006. – № 4. – С. 33–36.